Бумажка на зеркале

Задача 1. [ИОШ 2017/18, 9 класс, задача 1] Школьник проделал следующий эксперимент. Он встал перед зеркалом, закрыл один глаз, а затем приклеил на то место зеркала, на котором он видел изображение своего закрытого глаза, маленький кусочек бумаги. После этого, не меняя положение головы, он открыл тот глаз, который был закрыт, и открыл другой. На каком месте своего изображения он увидит теперь кусочек бумаги? Ответ обосновать.

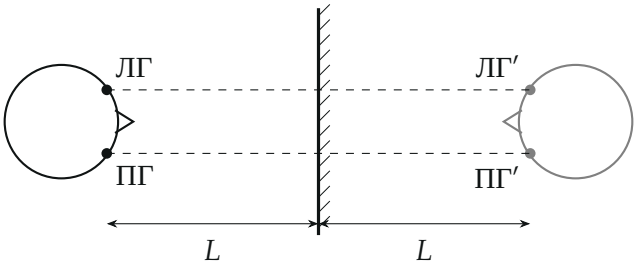


Поясняющий рисунок: школьник перед плоским зеркалом, вид сверху. Точки — его глаза.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображения в плоском зеркале. Изображение точки лежит симметрично ей относительно плоскости зеркала, а глаз видит изображение по прямой «глаз — изображение»: свет приходит в глаз так, будто идёт прямо из изображения. Бумажка закрывает изображение, если лежит на этой прямой там, где прямая пересекает зеркало. Главная идея — найти, где на зеркале пересекаются две такие прямые, и заметить, что точка пересечения у обеих одна.

Обозначения. Вид сверху. ЛГ и ПГ — левый и правый глаз, ЛГ′ и ПГ′ — их изображения в зеркале, Б — бумажка. Ось x перпендикулярна зеркалу, ось y вдоль него; начало — на зеркале напротив середины между глазами. Глаза на расстоянии L от зеркала, расстояние между глазами $2a$: ЛГ $(-L;\ a)$, ПГ $(-L;\ -a)$. Пусть закрыт левый глаз (для правого всё так же, с заменой сторон).

1. Изображения глаз. По закону отражения изображение точки в плоском зеркале симметрично ей относительно зеркала: ЛГ′ $(L;\, a)$, ПГ′ $(L;\, -a)$. Изображение левого глаза остаётся «левым» по y, то есть на той же высоте рисунка, что и сам глаз.

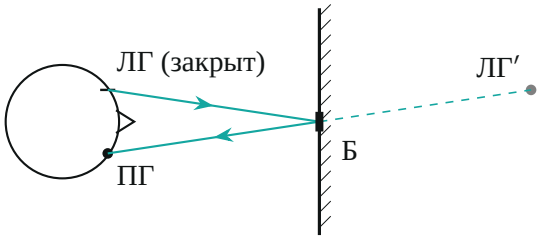


Изображения глаз (серым) симметричны глазам относительно зеркала: каждое на своём перпендикуляре к зеркалу, на том же расстоянии L за ним.

2. Куда клеить бумажку. Левый глаз закрыт, смотрит правый. Он видит изображение ЛГ′ по прямой ПГ — ЛГ′. Реальный луч идёт так: от левого глаза к зеркалу, отражается в точке Б и попадает в правый глаз; за зеркалом его продолжение приходит в ЛГ′. Значит, бумажку надо клеить в точку пересечения прямой ПГ — ЛГ′ с зеркалом. Найдём её. Прямая проходит через $(-L;\, -a)$ и $(L;\, a)$, то есть через точки, симметричные относительно начала координат, поэтому она проходит и через само начало:

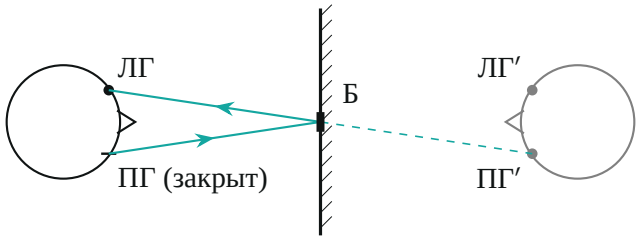
$$y_{\text{Б}} = -a + \frac{a-(-a)}{L-(-L)}\,(0-(-L)) = -a + a = 0.$$

Бумажка — на зеркале ровно напротив середины между глазами (напротив переносицы), при любых L и a.



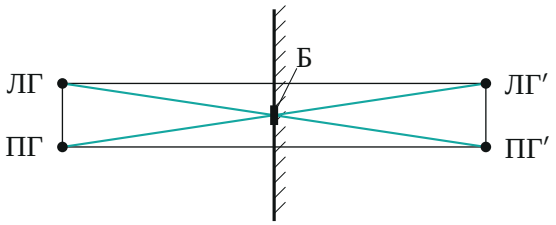
Закрыт левый глаз. Правый видит его изображение ЛГ′ по прямой ПГ — ЛГ′ (сплошной луч отражается от зеркала, штрих — его продолжение). Бумажка Б перекрывает этот луч.

3. Открываем левый глаз, закрываем правый. Теперь смотрит левый глаз, а закрыт правый. Изображение правого глаза ПГ′ левый глаз видит по прямой ЛГ — ПГ′, через точки $(-L;\ a)$ и $(L;\ -a)$. Они тоже симметричны относительно начала координат, значит, и эта прямая пересекает зеркало в той же точке $y = 0$ — там, где бумажка. Две прямые «глаз — изображение другого глаза» перекрещиваются ровно на зеркале, как диагонали прямоугольника ЛГ, ПГ, ПГ′, ЛГ′ (зеркало делит его пополам).



Закрыт правый глаз. Левый видит изображение ПГ′ по прямой ЛГ — ПГ′, и она проходит через ту же точку Б: бумажка закрывает изображение правого глаза.

4. Почему так при любом положении головы. Рисунок ниже — оба построения вместе: глаза и их изображения стоят в вершинах прямоугольника, а зеркало проходит через середину его диагоналей. Если голова повёрнута или сдвинута вдоль зеркала, это ничего не меняет: изображения всё равно симметричны глазам, отрезки «глаз — изображение другого глаза» всё равно делятся зеркалом пополам в одной точке (это центр симметрии четырёх точек).



Глаза и их изображения — вершины прямоугольника; его диагонали (бирюзовые) пересекаются на зеркале, в точке Б.

Обратите внимание: ответ «бумажка закроет изображение того же, левого глаза» неверен. Левый глаз сам себя видит по перпендикуляру к зеркалу (прямая ЛГ — ЛГ′), и эта прямая проходит мимо Б, на расстоянии a от неё.

Проверка. Расчёт не зависит от L и a: при любом расстоянии до зеркала Б — напротив переносицы. Тот же опыт с закрытым правым глазом сначала (симметрия задачи) даёт бумажку в той же точке и тот же вывод.

Смысл: бумажка всегда закрывает изображение *закрытого* глаза, какой бы глаз ни был закрыт.

Ответ. Бумажка окажется на изображении другого глаза — того, который теперь закрыт. Например, сначала был закрыт левый глаз, бумажку клеили напротив переносицы; после смены глаз она закроет изображение правого (теперь закрытого) глаза.