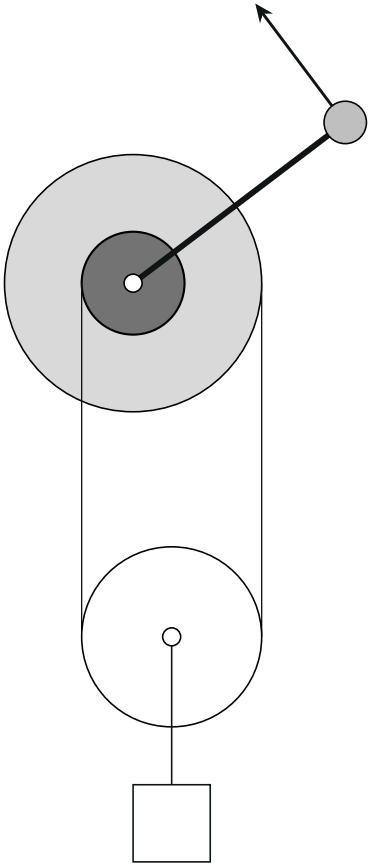
Дифференциальный ворот

Задача 3. [ИОШ 2017/18, 9 класс, задача 3] Дифференциальный ворот состоит из двух блоков с радиусами r и $2r$, насаженных на одну ось и склеенных между собой. На блоки ворота в противоположных направлениях намотана верёвка, на которой висит подвижный блок, радиус которого подобран так, что свободные концы верёвки вертикальны. К оси подвижного блока прикреплён груз массой m. Ручку ворота, находящуюся на расстоянии $4r$ от оси ворота, вращают с угловой скоростью ω так, как показано на рисунке. С какой скоростью поднимается груз? Какую силу необходимо прикладывать к ручке ворота, чтобы груз поднимался равномерно? Трения нет, все блоки невесомы.



▲ **Решение. Что происходит.** Ворот — два склеенных блока, они вращаются с одной угловой скоростью. Верёвка наматывается на большой блок и одновременно сматывается с малого, поэтому петля, в которой висит подвижный блок, укорачивается лишь на разность намотанного и смотанного — груз поднимается медленно, а сила на ручке нужна маленькая. Это задача на «золотое правило механики»: во сколько раз выигрываем в силе, во столько проигрываем в скорости. Скорость найдём из кинематики нерастяжимой верёвки, силу — из условия равновесия моментов для ворота, и проверим её законом сохранения энергии.

Обозначения. T — сила натяжения верёвки (одна и та же по всей длине: блоки невесомы и без трения); F — сила на ручке, v — скорость груза. Ось y — вверх. Ворот вращается против часовой стрелки (как на рисунке: конец ручки движется вверх-влево). Тогда на правом краю большого блока ($x = 2r$) точки обода движутся вверх, а на левом краю малого ($x = -r$) — вниз.

1. Скорость груза. За малое время Δt ворот поворачивается на угол $\omega\Delta t$. Правый конец верёвки сходит с большого блока, и точки обода там движутся вверх со скоростью $\omega \cdot 2r$: верёвка наматывается, правая ветвь укорачивается на

$$\Delta l_1 = 2r\,\omega\,\Delta t.$$

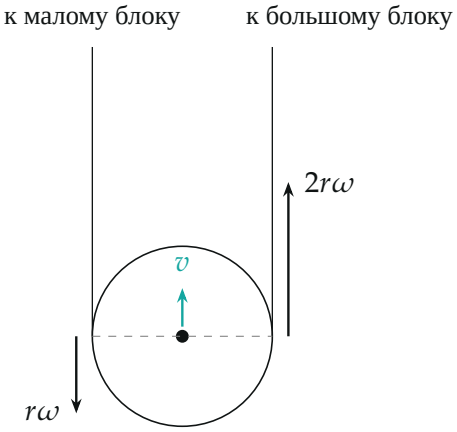
Левый конец сходит с малого блока, обод там движется вниз со скоростью ωr: верёвка сматывается, левая ветвь удлиняется на

$$\Delta l_2 = r\,\omega\,\Delta t.$$

Верёвка нерастяжима, поэтому петля под воротом (две вертикальные ветви вместе) укорачивается на $\Delta l_1 - \Delta l_2 = r\omega\,\Delta t$. Подвижный блок висит на двух ветвях, и каждая из них укорачивается в среднем на половину этого, так что блок (а с ним и груз) поднимается на

$$\Delta y = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{2} = \frac{r\omega\,\Delta t}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{r\omega}{2}.$$

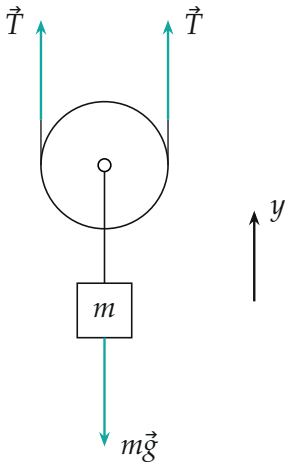
Знак «плюс» у Δy: груз действительно поднимается, потому что на большой блок наматывается больше, чем сматывается с малого.



Скорости точек подвижного блока, где их касаются ветви: справа верёвка идёт вверх со скоростью $2r\omega$, слева вниз со скоростью $r\omega$. Скорости точек горизонтального диаметра меняются линейно, центр блока — посередине, его скорость — среднее: $v = \frac{2r\omega - r\omega}{2} = \frac{r\omega}{2}$.

2. Натяжение верёвки. Запишем второй закон Ньютона для подвижного блока вместе с грузом в проекции на ось y. Груз поднимается равномерно, ускорения нет, блок невесом:

$$2T - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{mg}{2}.$$

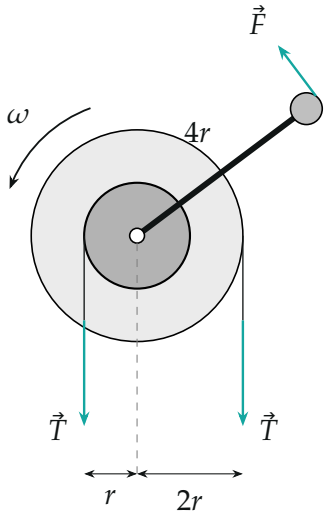


Силы на подвижный блок с грузом: две ветви верёвки тянут вверх с силой T каждая, вниз — сила тяжести груза.

3. Сила на ручке. Ворот вращается равномерно и невесом, поэтому сумма моментов сил относительно его оси равна нулю (правило моментов). Ось выбрана так, чтобы сила реакции оси не вошла в уравнение. На ворот действуют: правая ветвь тянет вниз с силой T на плече $2r$ (момент по часовой стрелке, против вращения), левая ветвь тянет вниз с силой T на плече r (момент против часовой стрелки, по вращению), сила F на плече $4r$. Силу берём перпендикулярно ручке (по скорости конца ручки) — так она наименьшая. Моменты против часовой стрелки считаем положительными:

$$F \cdot 4r + T \cdot r - T \cdot 2r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{T}{4} = \frac{mg}{8}.$$

Знак плюс у F: сила направлена по вращению, вверх-влево на рисунке условия.



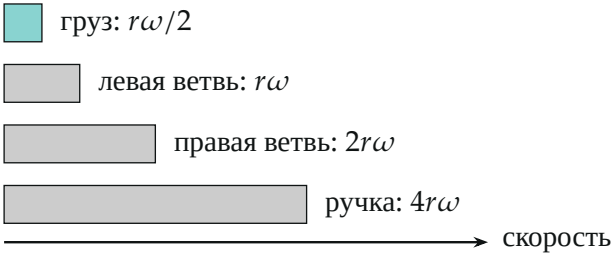
Силы на ворот (без силы реакции оси). Плечи: у левой силы T — r, у правой — $2r$, у силы $\vec{F}$, перпендикулярной ручке, — $4r$.

4. Проверка законом сохранения энергии. Блоки невесомы, трения нет, груз движется равномерно — вся работа силы F идёт в потенциаль-

ную энергию груза. Мощность силы на ручке равна мощности подъёма: конец ручки движется со скоростью $4r\omega$ вдоль силы, поэтому

$$F \cdot 4r\omega = mg\,v = mg \cdot \frac{r\omega}{2} \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{mg}{8}.$$

Совпало с пунктом 3: выигрыш в силе в 8 раз ровно равен проигрышу в скорости (v в 8 раз меньше скорости ручки $4r\omega$).



Скорости в масштабе: ручка движется в 8 раз быстрее груза, поэтому сила на ней в 8 раз меньше веса.

Обратите внимание: груз поднимается со скоростью не $2r\omega$ и не $r\omega$, а $r\omega/2$ — петлю укорачивает только *разность* намотки на два блока, и делится она ещё на две ветви. Если бы оба радиуса были одинаковы, груз не поднимался бы вовсе.

Проверка. Размерность: $[r\omega] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$, $[mg/8] = \text{Н}$. Предел: если радиусы блоков ворота r_1 и r_2, то $v = \omega(r_2 - r_1)/2$ и $F = mg(r_2 - r_1)/(2 \cdot 4r)$; при $r_2 = r_1$ получаем $v = 0$ и $F = 0$ — моменты двух ветвей уравновешены, ворот крутится вхолостую. Сила дважды найдена разными способами (моменты и энергия).

Смысл: дифференциальный ворот даёт большой выигрыш в силе за счёт того, что работает только разность радиусов блоков.

Ответ. $v = \dfrac{r\omega}{2}$; $F = \dfrac{mg}{8}$ (перпендикулярно ручке, по направлению вращения).