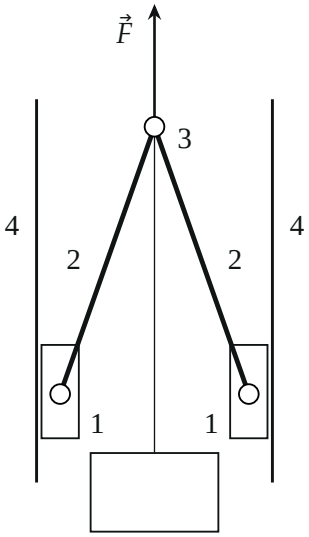
Самотормозящий механизм ползунов

Задача 4. [ИОШ 2017/18, 9 класс, задача 4] При проектировании подъёмных машин используются механизмы, делающие невозможным обратное движение грузов при отключении их двигателей (самотормозящие). На рисунке показан механизм, состоящий из двух ползунов — 1 (деталей, совершающих скользящее движение по направляющим 4), соединённых шарнирно с двумя стержнями 2, которые между собой также соединены шарниром (3). Объясните принцип торможения механизма при «выключении» силы $\vec{F}$. При каком коэффициенте трения между ползунами и направляющими механизм будет самотормозящим?



▲ **Решение. Что происходит.** Груз висит на тросе, привязанном к шарниру 3. Пока двигатель тянет шарнир вверх силой $\vec{F}$, она больше веса груза, и стержни растянуты: они тянут ползуны к середине, от направляющих. Ползуны не прижаты к направляющим, трения нет, механизм свободно идёт вверх. Двигатель выключили — груз тянет шарнир 3 вниз, стержни сжимаются и «встают в распор»: каждый давит на свой ползун вниз и наружу, ползуны прижимаются к направляющим. Чем больше вес груза, тем сильнее прижатие и тем больше возможная сила

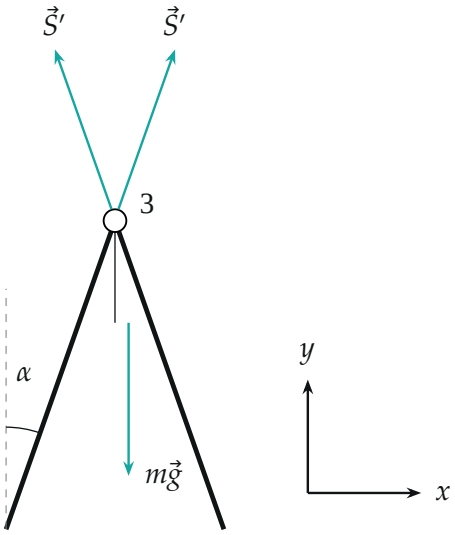
трения. Это задача на равновесие с трением покоя: механизм самотормозящий, если наибольшая сила трения покоя kN не меньше той, что нужна для равновесия, при любом весе груза.

Обозначения. l — длина стержня, α — угол между стержнем и направляющей (вертикалью), S — сила, с которой стержень давит на ползун (стержни невесомы и соединены шарнирами на концах, поэтому сила стержня направлена вдоль него), N — сила нормальной реакции направляющей, $F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя, k — коэффициент трения. Оси: x — горизонтально, y — вертикально вверх. Массой стержней и ползунов пренебрегаем, механизм симметричен.

1. Шарнир 3 после выключения силы $\vec{F}$. На шарнир действуют сила натяжения троса mg вниз и силы со стороны двух сжатых стержней $\vec{S}'$, направленные вдоль стержней от ползунов к шарниру (вверх и к середине). Шарнир в равновесии, запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$2S\cos\alpha - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{mg}{2\cos\alpha}.$$

Горизонтальные составляющие сил стержней $S\sin\alpha$ направлены навстречу друг другу и уравновешиваются по симметрии.



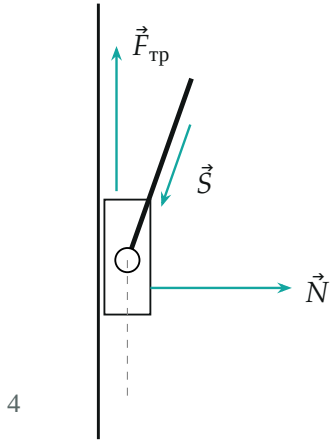
Силы на шарнир 3 без силы $\vec{F}$: трос тянет вниз с силой mg, сжатые стержни толкают шарнир вдоль себя. Угол α — между стержнем и вертикалью.

2. Ползун. По третьему закону Ньютона стержень давит на ползун с той же силой S, вдоль стержня вниз и наружу — к направляющей. Кроме неё на ползун действуют сила реакции направляющей N (горизонтально, к середине) и сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ (вдоль направляющей; ползун стремится съехать вниз, поэтому она направлена вверх). Ползун невесом и покоится, второй закон Ньютона в проекциях:

$$x: \quad N - S\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N = S\sin\alpha = \frac{mg}{2}\,\operatorname{tg}\alpha,$$

$$y: \quad F_{\text{тр}} - S\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; F_{\text{тр}} = \frac{mg}{2}.$$

Тот же результат даёт правило моментов для стержня относительно ползуна у организаторов: $\frac{1}{2}mg\,l\sin\alpha = Nl\cos\alpha$.



Силы на левый ползун: сжатый стержень давит вдоль себя вниз и к направляющей ($\vec{S}$, стрелка нарисована рядом со стержнем), направляющая отвечает нормальной реакцией $\vec{N}$ и силой трения покоя $\vec{F}_{тр}$ вверх.

3. Условие самоторможения. Сила трения покоя не может превышать kN. Ползун останется на месте, если нужная для равновесия сила

трения не больше наибольшей:

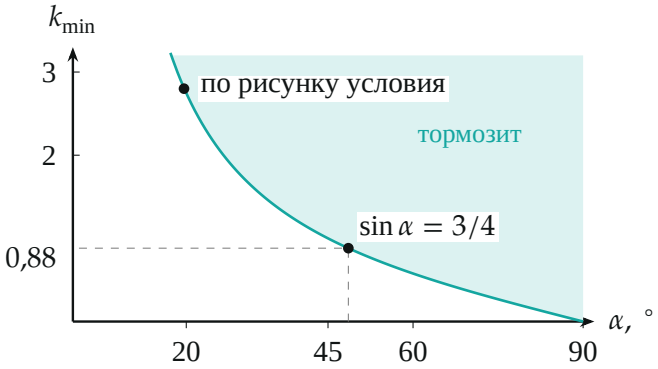
$$\frac{mg}{2} \le k\,\frac{mg}{2}\,\operatorname{tg}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad k \ge \operatorname{ctg}\alpha.$$

Вес груза сократился: если механизм тормозит лёгкий груз, он тормозит и любой тяжёлый — прижимающая сила растёт вместе с весом. Это и есть смысл слова «самотормозящий».

4. Число. В тексте условия размеров нет; у организаторов в решении $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{7}/3$, то есть $\sin\alpha = 3/4$: стержень длиной l разведён по горизонтали на $\frac{3}{4}l$ (полуширина между осями ползунов $\frac{3}{4}$ длины стержня), $\alpha \approx 48{,}6°$. Тогда

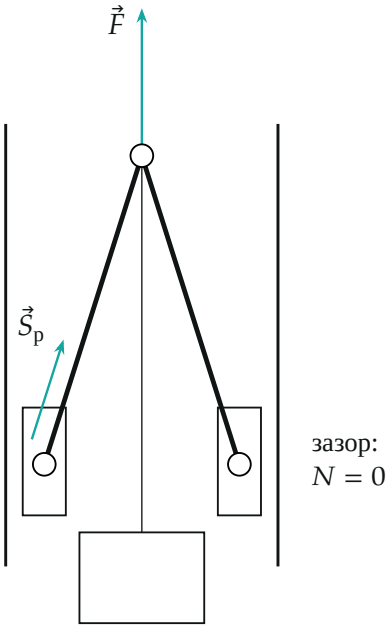
$$k \ge \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-9/16}}{3/4} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}88.$$

Обратите внимание: ответ сильно зависит от угла. На рисунке условия стержни почти вертикальны ($\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}36$, $\alpha \approx 20°$), и по нему вышло бы $k \ge \operatorname{ctg} 20° \approx 2{,}8$ — такого трения не бывает, механизм с такими крутыми стержнями не заклинит. Чем шире разведены стержни, тем меньше нужен коэффициент трения.



Наименьший коэффициент трения $k_{\min} = \operatorname{ctg}\alpha$ в зависимости от угла стержня с направляющей. Закрашено — область, где механизм тормозит (выше кривой).

5. Почему при включённой силе механизм не тормозит. Пусть двигатель тянет шарнир 3 вверх силой $F > mg$ (груз поднимается). Теперь шарнир тянут вверх, и стержни растянуты: проекция на y для шарнира $F - mg - 2S_\text{р}\cos\alpha = 0$, $S_\text{р} = \frac{F-mg}{2\cos\alpha} > 0$. Растянутый стержень тянет ползун к середине, от направляющей; направляющая может только толкать, поэтому $N = 0$, трения нет, и ползуны свободно скользят вверх.



Двигатель включён: растянутые стержни тянут ползуны к середине, ползуны отходят от направляющих, трения нет.

Проверка. Размерность: k безразмерен, $\operatorname{ctg}\alpha$ тоже. Пределы: при $\alpha \to 90°$ (стержни почти горизонтальны) $k_\text{min} \to 0$ — стержни распирают направляющие огромной силой $N = \frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha \to \infty$, хватит любого трения; при $\alpha \to 0$ (стержни вертикальны) $k_\text{min} \to \infty$ — стержень давит только вниз, прижатия нет, не поможет никакое трение. Два способа (силы на ползун и моменты для стержня) дали одно и то же N.

Смысл: самоторможение держится на том, что прижимающая сила пропорциональна весу груза, а коэффициент пропорциональности задаёт угол стержней.

Ответ. При выключении $\vec{F}$ груз тянет шарнир 3 вниз, стержни сжимаются и распирают ползуны, прижимая их к направляющим; сила трения растёт вместе с весом груза. Механизм самотормозящий при $k \geq \operatorname{ctg}\alpha$, где α — угол стержня с направляющей; при размерах организаторов ($\sin\alpha = 3/4$) $k \geq \sqrt{7}/3 \approx 0{,}88$.