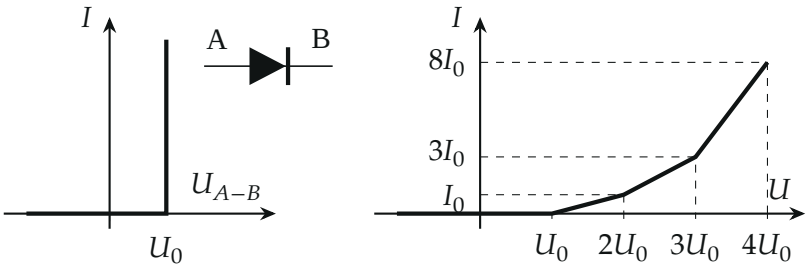
Цепь с неидеальными диодами

Задача 6. [ИОШ 2017/18, 9 класс, задача 6] На левом рисунке показана вольтамперная характеристика (зависимость тока от напряжения) неидеального диода и его обозначение на электрических схемах. Используя неидеальные диоды, резисторы и провода, постройте такую электрическую цепь, вольтамперная характеристика которой показана на правом рисунке.

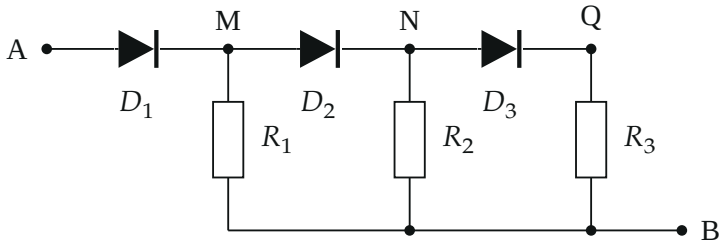


▲ **Решение. Что происходит.** Диод в задаче — «ступенька»: пока напряжение на нём меньше U_0 (и при любом обратном), ток через него не идёт; открытый диод пропускает любой ток, а напряжение на нём остаётся ровно U_0. Значит, открытый диод — это «батарейка наоборот», отнимающая U_0, а закрытый — разрыв. Характеристика цепи — ломаная с изломами при U_0, $2U_0$, $3U_0$: на каждом изломе в работу включается новая ветвь и наклон растёт. Это задача класса «диоды — перебор состояний»: для каждого участка напряжений определяем, какие диоды открыты, рисуем эквивалентную схему и считаем ток по закону Ома.

Обозначения. R_1, R_2, R_3 — сопротивления трёх резисторов, I — ток цепи от A к B при напряжении $U = \varphi_A - \varphi_B$. Наклон ломаной на участке — проводимость $\Delta I/\Delta U$: на втором участке $\frac{I_0}{U_0}$, на третьем $\frac{3I_0-I_0}{U_0} = \frac{2I_0}{U_0}$, на четвёртом $\frac{8I_0-3I_0}{U_0} = \frac{5I_0}{U_0}$.

1. Какой должна быть схема. Ток появляется при $U = U_0$ — значит, на пути от A к B первым стоит один диод, и до напряжения U_0 он всё закрывает. Новая ветвь подключается при $2U_0$ и при $3U_0$ — значит, перед ней стоят два и три диода подряд. Соберём цепочку из трёх диодов A — M — N — Q и из каждой точки M, N, Q проведём резистор к выводу

В. Ветвь через резистор R_1 проходит один диод, через R_2 — два, через R_3 — три.



Искомая цепь: три диода цепочкой от A, из каждой точки M, N, Q — резистор к B. Ответ: $R_1 = R_2 = U_0/I_0$, $R_3 = U_0/(3I_0)$.

2. Участок $U < U_0$**.** Диод D_1 закрыт: напряжения на нём не хватает (при $U < 0$ он заперт обратным напряжением). Ток через D_1 не идёт, а другого пути от A нет: $I = 0$, как на рисунке условия.

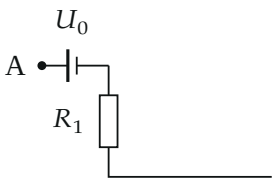
3. Участок $U_0 \le U \le 2U_0$**.** D_1 открыт и держит на себе U_0, поэтому $\varphi_M = \varphi_A - U_0$ и на резисторе R_1 напряжение $U - U_0$. Диод D_2 при этом закрыт: если ток через него не идёт, то тока нет и в R_2, $\varphi_N = \varphi_B$ и на D_2 напряжение $U - U_0 \le U_0$ — его не хватает, предположение подтвердилось. По закону Ома

$$I = \frac{U - U_0}{R_1}.$$

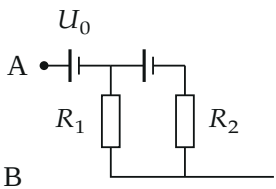
При $U = 2U_0$ должно быть $I = I_0$, отсюда

$$\frac{U_0}{R_1} = I_0 \qquad \Rightarrow \qquad R_1 = \frac{U_0}{I_0}.$$

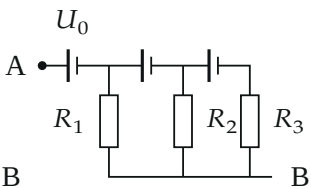
$U_0 < U < 2U_0$



$2U_0 < U < 3U_0$



$U > 3U_0$



Эквивалентные схемы трёх участков: открытый диод заменён источником, отнимающим U_0, закрытые диоды и ветви за ними убраны. Слева направо работают одна, две и три ветви.

4. Участок $2U_0 \le U \le 3U_0$**.** Открыты D_1 и D_2, на каждом U_0: на R_1 напряжение $U-U_0$, на R_2 — $U-2U_0$ (D_3 закрыт по той же причине, что D_2 в пункте 3). Ток в узле A по закону сохранения заряда равен сумме токов ветвей:

$$I = \frac{U-U_0}{R_1} + \frac{U-2U_0}{R_2}.$$

При $U = 3U_0$ должно быть $I = 3I_0$:

$$3I_0 = \frac{2U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} = 2I_0 + \frac{U_0}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = \frac{U_0}{I_0}.$$

Обратите внимание: в точке излома $U = 2U_0$ новая ветвь ещё не даёт тока ($U - 2U_0 = 0$), поэтому ломаная непрерывна, и условие удобно писать в правом конце участка.

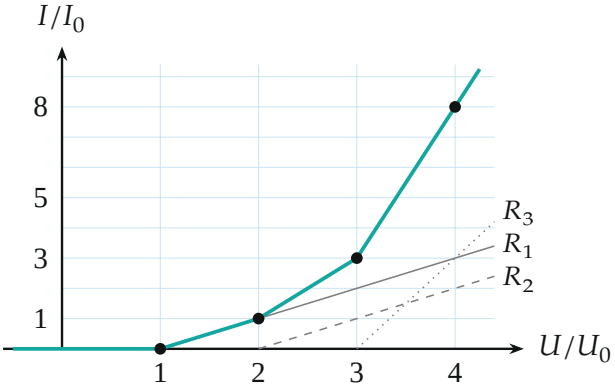
5. Участок $U \ge 3U_0$**.** Открыты все три диода, работают все три резистора:

$$I = \frac{U-U_0}{R_1} + \frac{U-2U_0}{R_2} + \frac{U-3U_0}{R_3}.$$

При $U = 4U_0$ нужно $I = 8I_0$:

$$8I_0 = \frac{3U_0}{R_1} + \frac{2U_0}{R_2} + \frac{U_0}{R_3} = 5I_0 + \frac{U_0}{R_3} \qquad \Rightarrow \qquad R_3 = \frac{U_0}{3I_0}.$$

Тот же результат через наклоны: на каждом участке добавляется проводимость новой ветви, $\frac{1}{R_1} = \frac{I_0}{U_0}$, $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2I_0}{U_0}$, $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{5I_0}{U_0}$ — отсюда снова $R_1 = R_2 = \frac{U_0}{I_0}$ и $\frac{1}{R_3} = \frac{3I_0}{U_0}$.



Характеристика построенной цепи по формулам пунктов 2–5 (бирюзовая): точки $(1;0)$, $(2;1)$, $(3;3)$, $(4;8)$ *совпадают с рисунком условия. Серые линии — токи отдельных ветвей (*R_1 *сплошная,* R_2 *штриховая,* R_3 *точками), их сумма — ломаная.*

Проверка. Размерность: $[U_0/I_0]$ = Ом. Подстановка (python): при $U = 4U_0$ токи ветвей $3I_0$, $2I_0$ и $3I_0$, в сумме $8I_0$; при $U = 3U_0$ — $2I_0 + I_0 = 3I_0$; при $U = 2U_0$ — I_0. При $U < 0$ все диоды заперты, ток ноль, как у отрицательной части характеристики в условии.

Смысл: каждый следующий диод в цепочке задерживает включение своей ветви ещё на U_0, а сопротивление ветви задаёт, на сколько вырастет наклон.

Ответ. Три диода соединить последовательно (A — D_1 — M — D_2 — N — D_3 — Q, все в прямом направлении от A); между M и B включить резистор $R_1 = U_0/I_0$, между N и B — $R_2 = U_0/I_0$, между Q и B — $R_3 = U_0/(3I_0)$.