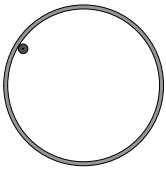
Обруч у стены и гвоздь

Задача 2. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 2] К стене прислонили и удерживают обруч. В одной точке в стене «внутри» обруча в стену вбили гвоздь так, что обруч касается его (см. рисунок). Найти геометрическое место точек стены, в которые нужно вбить второй гвоздь внутри обруча, чтобы обруч оставался неподвижным. Ответ обосновать (даже правильный ответ без обоснования засчитываться не будет).

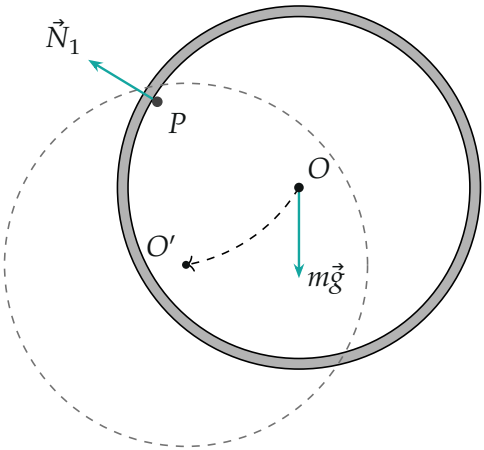


▲ **Решение. Что происходит.** Обруч прижат к стене и опирается изнутри на гвоздь P. Второй гвоздь Q вбивают так, чтобы обруч касался и его изнутри; нужно найти все такие места Q, при которых обруч остаётся неподвижным. Считаем стену и гвозди гладкими (трения нет): тогда сила гвоздя направлена по нормали к обручу, то есть вдоль радиуса, и гвоздь может только толкать, тянуть он не может. Главная идея: сначала понять, как движется обруч с одним гвоздём, — это покажет, где второй гвоздь нужен; затем проверить равновесие силами. Вес и обе реакции проходят через центр обруча, и всё сводится к вопросу, можно ли уравновесить вес двумя толкающими силами.

Обозначения. O — центр обруча (в нём приложен вес), R — радиус. Положение точки обруча задаём углом от горизонтали вправо против часовой стрелки. P — первый гвоздь (на рисунке условия он в верхней левой части обруча, угол $\varphi \approx 149°$), Q — второй гвоздь, его угол ψ; T — верхняя точка обруча ($90°$); P' — точка, диаметрально противоположная P (угол $\varphi - 180°$). $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — силы, с которыми гвозди действуют на обруч; $N_1 \geqslant 0$, $N_2 \geqslant 0$.

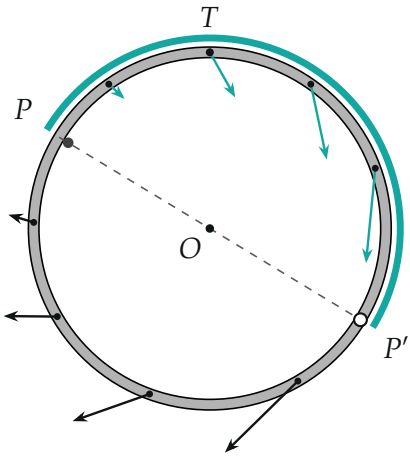
1. Обруч с одним гвоздём. Сила $\vec{N}_1$ направлена вдоль OP от центра, вес $m\vec{g}$ — вертикально вниз из центра. Если $P \neq T$, эти силы лежат на

разных прямых и уравновеситься не могут: освобождённый обруч начинает двигаться. Гвоздь всё время касается обруча изнутри, поэтому расстояние от него до центра обруча остаётся постоянным: центр опускается по дуге окружности с центром в гвозде.



Обруч с одним гвоздём P: силы $\vec{N}_1$ и $m\vec{g}$ и первые мгновения движения. Пунктиром — обруч в сдвинутом положении, стрелка — путь центра $O \to O'$.

2. Какие точки обруча сдвигаются внутрь. Движение обруча складывается из поступательного движения со скоростью центра $\vec{v}_O$ (она перпендикулярна PO и направлена вниз) и вращения вокруг центра. При вращении скорости точек касательны к обручу и точки внутрь и наружу не сдвигают. Значит, внутрь, к центру, смещаются те точки, где $\vec{v}_O$ направлена внутрь: это полуокружность, противоположная направлению $\vec{v}_O$. Её граница — диаметр, перпендикулярный $\vec{v}_O$, то есть диаметр PP'. Тот же вывод даёт вращение вокруг точки касания P как мгновенного центра. Итак, при освобождении обруча внутрь смещаются точки дуги от P по часовой стрелке через T до P', на остальной половине — наружу.



Скорости точек обруча при освобождении (ориентир — первый гвоздь P). Бирюзовые стрелки — точка смещается внутрь, чёрные — наружу. Бирюзовая дуга — вся «внутренняя» часть обруча от P через T до P'.

Второй гвоздь на «наружной» части обруча не поможет: обруч просто отойдёт от него. Значит, Q лежит на дуге PTP'. Но это только необходимое условие.

3. Условие равновесия. Если Q стоит между T и P (выше и левее первого гвоздя), обруч повернётся вокруг второго гвоздя, а первый ему уже не мешает. Разберём точно. Равновесие означает

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Все три силы проходят через O, поэтому их моменты относительно O равны нулю автоматически, и остаётся одно векторное равенство. Выберем ось x вправо, ось y вверх и спроецируем силы, направленные вдоль OP и OQ:

$$N_1 \cos\varphi + N_2 \cos\psi = 0, \qquad N_1 \sin\varphi + N_2 \sin\psi = mg.$$

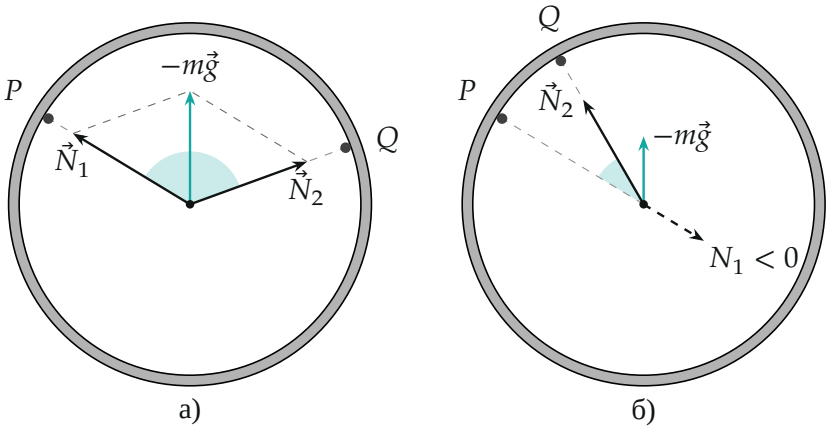
Решим систему (определитель $\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi = \sin(\psi - \varphi)$):

$$N_1 = -\frac{mg\cos\psi}{\sin(\psi-\varphi)}, \qquad N_2 = \frac{mg\cos\varphi}{\sin(\psi-\varphi)}.$$

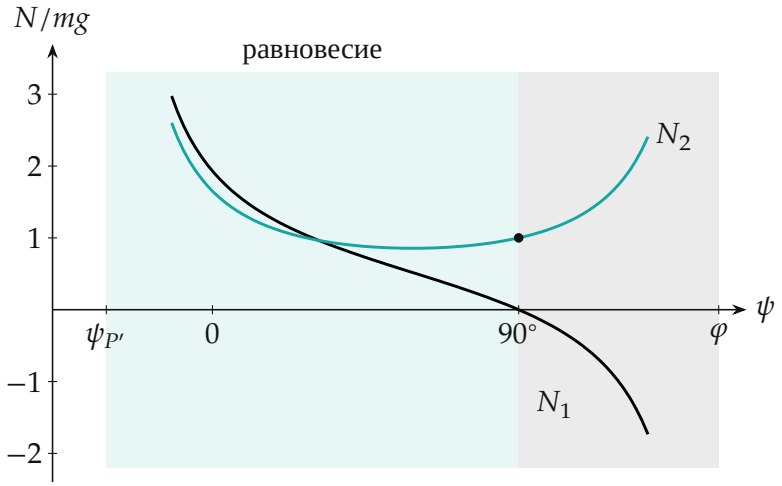
Для P в верхней левой четверти $\cos\varphi < 0$. Условие $N_2 \geqslant 0$ даёт $\sin(\psi - \varphi) < 0$, то есть $\varphi - 180^\circ < \psi < \varphi$. Тогда $N_1 \geqslant 0$ означает $\cos\psi \geqslant 0$, то есть $-90^\circ \leqslant \psi \leqslant 90^\circ$. Вместе

$$\varphi - 180^\circ < \psi \leqslant 90^\circ.$$

Геометрически это значит: вектор $-m\vec{g}$ (вверх) раскладывается по лучам OP и OQ с неотрицательными коэффициентами, когда луч OT лежит внутри угла POQ (он меньше развёрнутого).

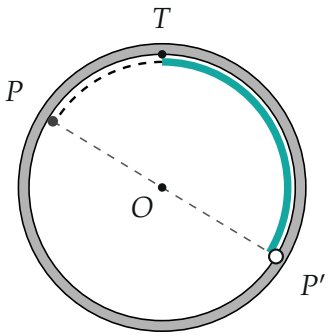


Разложение вектора $-m\vec{g}$ по лучам OP и OQ. а) Q на дуге от T вправо: T внутри угла POQ (закрашен), обе силы положительны ($N_1 \approx 1{,}21\,mg$, $N_2 \approx 1{,}10\,mg$ при $\psi = 20^\circ$). б) Q между T и P: T вне угла, $N_1 < 0$ — первый гвоздь должен был бы тянуть, равновесия нет.



Силы гвоздей в зависимости от положения Q (при $\varphi \approx 149°$). Равновесие — на закрашенном участке от $\psi_{P'} = \varphi - 180°$ до $90°$; при $\psi \to \psi_{P'}$ силы неограниченно растут, при $\psi = 90°$ имеем $N_1 = 0$, $N_2 = mg$.

4. Ответ. Искомое место — дуга обруча от верхней точки T до точки P', диаметрально противоположной первому гвоздю, по часовой стрелке через правую часть обруча, то есть та дуга, которая не содержит P. Верхняя точка T входит: обруч просто висит на втором гвозде, $N_1 = 0$. Точка P' не входит: силы гвоздей на концах диаметра направлены вдоль диаметра, а вес — поперёк, уравновесить его нельзя.



Искомое место второго гвоздя — бирюзовая дуга от T до P'. Пунктир — дуга между T и P, где обруч повернётся вокруг второго гвоздя; P' не входит (пустой кружок). Остальные точки не подходят.

То же правило при любом положении первого гвоздя: искомое место — дуга от T до P', не содержащая P. Если первый гвоздь в нижней половине обруча, верхний и нижний гвозди просто меняются ролями, и дуга оказывается такой же формы.

Обратите внимание: недостаточно поставить второй гвоздь в «внутренней» половине. Гвоздь на дуге между T и P (выше и левее P) тоже принадлежит ей, но обруч повернётся вокруг него: для равновесия нужно, чтобы вес был зажат между толкающими силами, а не просто чтобы гвоздь мешал одному из движений.

Проверка. Размерность: N_1/mg и N_2/mg безразмерны. Предельные случаи: при $\psi = 90^\circ$ (гвоздь в верхней точке) получаем $N_1 = 0$, $N_2 = mg$ — обруч висит на верхнем гвозде. При $\psi \to \varphi - 180^\circ$ знаменатель $\sin(\psi - \varphi) \to 0$ и силы растут неограниченно: гвозди на концах диаметра вес не удержат, поэтому P' исключена. Кинематический способ (пункт 2) и силовой (пункт 3) дали одну и ту же дугу. Численно: для каждого ψ с шагом 1° проверили, есть ли допустимое смещение центра вниз, не убирающее обруч от обоих гвоздей, — равновесие нашлось ровно при $-31^\circ \leqslant \psi \leqslant 90^\circ$, как в формулах.

Физический смысл: обруч держится, когда вертикаль, проведённая вверх из центра, проходит между радиусами к двум гвоздям — вес «зажат» между двумя толкающими силами.

Ответ. Дуга обруча от верхней точки T до точки P', диаметрально противоположной первому гвоздю (дуга, не содержащая первый гвоздь): T включена, P' нет. При первом гвозде в верхней левой части (как на рисунке) это дуга от верхней точки по часовой стрелке до диаметра, проходящего через первый гвоздь.