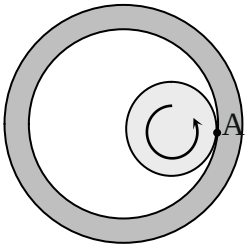
Теорема Насира ад-Туси

Задача 3. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 3] В конце 19 века в связи с развитием машиностроения велись интенсивные работы по преобразованию одного движения в другое. Например, вращательного в движение по прямой или s-образное. Тогда математики вспомнили о теореме, доказанной 900 лет назад известным персидским математиком Насиром ад-Туси. Эта теорема сводится к следующему. Пусть по внутренней поверхности полого цилиндра с внутренним радиусом R катится без проскальзывания диск радиуса $R/2$. Какой будет траектория движения точки на поверхности диска (например, точки A на рисунке)? Ответ обоснуйте. Найдите зависимость величины скорости точки A от времени, если диск вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω, а в начальный момент точка A касалась поверхности цилиндра в самой правой её точке (см. рисунок).



▲ **Решение. Что происходит.** Диск катится по внутренней стороне цилиндра вдвое большего радиуса. Его центр C идёт по окружности радиуса $R/2$ вокруг оси цилиндра O, а сам диск вращается в обратную сторону. Главное наблюдение: окружность диска проходит через ось O (центр диска на расстоянии $R/2$ от O и радиус диска тоже $R/2$). Значит, отрезок OP от оси до точки касания P — диаметр диска, и точка обода A видна из O и P под прямым углом. Отсюда траектория получается без вычислений. Закон движения найдём сложением двух равномерных вращений, а скорость — через мгновенный центр вращения P.

Обозначения. O — ось цилиндра, начало координат; ось x направим вправо (в начале точка A на ней), ось y — вверх. C — центр диска, P —

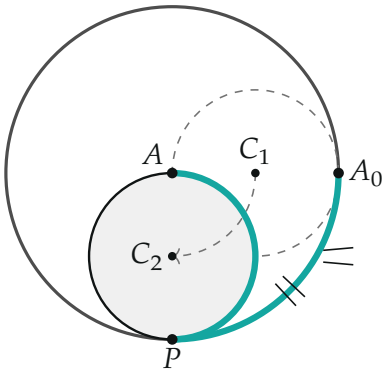
точка касания диска и цилиндра, Ω — угловая скорость обращения центра диска вокруг O. Для определённости центр идёт по часовой стрелке, а диск вращается против часовой, как на рисунке условия; ω — угловая скорость диска относительно неподвижных осей, как в условии.

1. Связь Ω и ω. Диск катится без проскальзывания, поэтому скорость его точки касания P равна нулю: в этот момент P — мгновенный центр вращения диска. Расстояние от P до центра C равно $R/2$, поэтому $v_C = \omega \cdot \dfrac{R}{2}$. С другой стороны, центр C движется по окружности радиуса $OC = R/2$ с угловой скоростью Ω: $v_C = \Omega \cdot \dfrac{R}{2}$. Значит,

$$\Omega = \omega.$$

Центр обходит ось с той же угловой скоростью, с какой вращается диск, но в противоположную сторону.

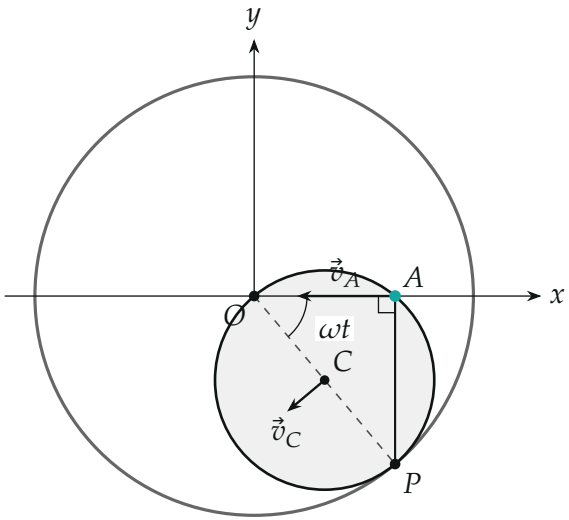
Второй способ — сравнить длины дуг. Пусть центр диска повернулся вокруг O на четверть оборота: диск перекатился по четверти окружности цилиндра, то есть на дугу длиной $\dfrac{2\pi R}{4} = \dfrac{\pi R}{2}$. По диску прошла дуга такой же длины (нет проскальзывания), а это ровно половина его окружности: $\dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \dfrac{R}{2} = \dfrac{\pi R}{2}$. Поэтому точка A, бывшая в касании, оказалась на противоположном конце диаметра — в точке O, и диск (в неподвижных осях) повернулся за это время на четверть оборота, как и центр: $\omega = \Omega$.



Четверть оборота центра ($C_1 \to C_2$): по цилиндру прокатилась дуга A_0P, по диску — дуга AP (обе выделены, отмечены одинаково). Они равны, и точка A оказалась в центре цилиндра.

Обратите внимание: ω в условии — угловая скорость диска относительно неподвижных осей. Относительно линии OC, которая сама вращается, диск поворачивается вдвое быстрее: за четверть оборота центра точка A перешла с продолжения OC на отрезок CO, то есть на половину оборота.

2. Траектория. Точка A лежит на ободе, то есть на окружности диска, а OP — диаметр этой окружности (C — середина OP, $OC = CP = R/2$). Угол OAP опирается на диаметр, поэтому он прямой.



Диск в произвольный момент t; точка P — мгновенный центр вращения, OP — диаметр диска, $\angle OAP = 90°$. Скорость $\vec{v}_A$ перпендикулярна PA, то есть направлена вдоль AO.

Скорость точки диска перпендикулярна отрезку, соединяющему её с мгновенным центром P. Значит, $\vec{v}_A \perp PA$. Но и $AO \perp PA$, поэтому $\vec{v}_A$ направлена вдоль прямой AO. Скорость, направленная вдоль вектора $\vec{OA}$, не поворачивает этот вектор: направление $\vec{OA}$ не меняется, и точка A всё время остаётся на одной прямой, проходящей через O, — на той, где она была вначале, то есть на оси x. Это горизонтальный диаметр

цилиндра; A ходит по нему между точками $x = -R$ и $x = R$ и проходит через ось цилиндра.

3. Закон движения. Центр диска идёт по окружности радиуса $R/2$ вокруг O по часовой стрелке с угловой скоростью ω, и в начальный момент он на оси x:

$$x_C = \frac{R}{2}\cos\omega t, \qquad y_C = -\frac{R}{2}\sin\omega t.$$

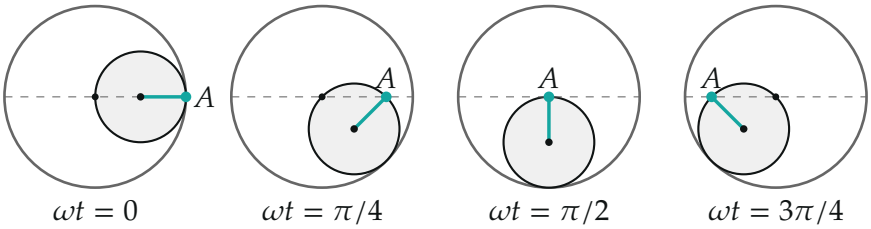
Точка A вращается вокруг C против часовой стрелки с той же угловой скоростью ω на расстоянии $R/2$, и в начальный момент вектор $\vec{CA}$ направлен по оси x:

$$x_A - x_C = \frac{R}{2}\cos\omega t, \qquad y_A - y_C = \frac{R}{2}\sin\omega t.$$

Сложим:

$$x_A = R\cos\omega t, \qquad y_A = 0.$$

Подтверждение пункта 2: $y_A = 0$ в любой момент, A колеблется гармонически по горизонтальному диаметру. В момент $\omega t = \pi/2$ получаем $x_A = 0$: точка в центре цилиндра.



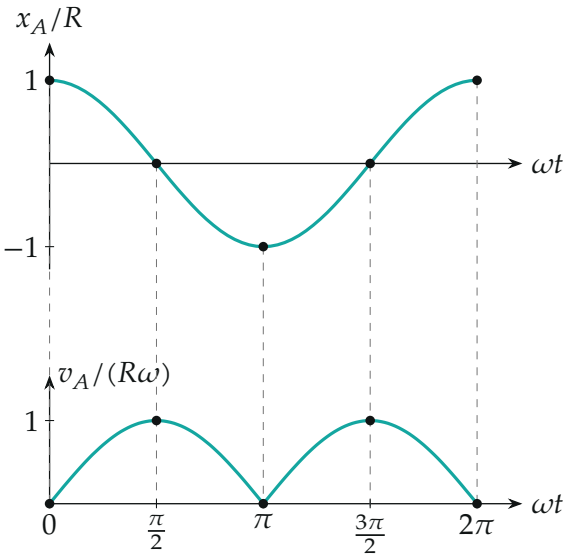
Положения диска и точки A через равные промежутки ωt (CA — радиус диска к точке A).

4. Скорость. Дифференцируем: $v_x = -R\omega\sin\omega t$, $v_y = 0$, поэтому величина скорости

$$v_A(t) = R\omega|\sin\omega t|.$$

Второй способ — через мгновенный центр: $v_A = \omega\cdot PA$. Из рисунка PA — расстояние от P до оси x, то есть $PA = R\sin\omega t$ (в первой четверти).

Получаем то же самое.



Координата $x_A(t)$ и скорость $v_A(t)$ за период $2\pi/\omega$: скорость нулевая в крайних точках, наибольшая в центре цилиндра.

Проверка. Размерность: $R\omega$ — м/с. При $t = 0$ получаем $v_A = 0$: в начальный момент A — точка касания, а у неё при качении без проскальзывания скорость нулевая. При $\omega t = \pi/2$ точка A в центре цилиндра, и $v_A = R\omega$ — вдвое больше скорости центра диска $v_C = R\omega/2$: так и должно быть, ведь A в этот момент — конец диаметра, противоположный мгновенному центру P. Оба способа (производная и мгновенный центр) дали одинаковую скорость.

Замечание. Прямой ход — свойство только точек обода (в критериях организаторов сказано «любая фиксированная точка диска» — это неточно): точка внутри диска на расстоянии $d < R/2$ от центра описывает эллипс с полуосями $R/2 + d$ и $R/2 - d$, а сам центр ($d = 0$) — окружность.

Физический смысл: качение по внутренней стороне цилиндра вдвое большего радиуса превращает вращение в движение по прямой — на этом основана теорема Насира ад-Туси.

Ответ. Траектория точки A — горизонтальный диаметр цилиндра (прямая через его ось): $x_A(t) = R\cos\omega t$, $y_A = 0$; величина скорости $v_A(t) = R\omega\,|\sin\omega t|$.