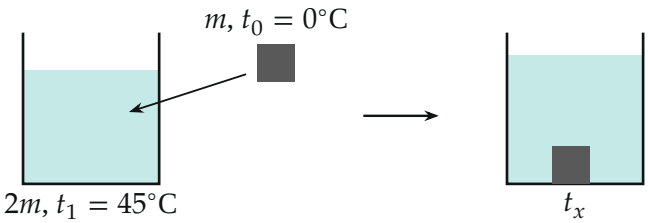
Теплоёмкость, зависящая от температуры

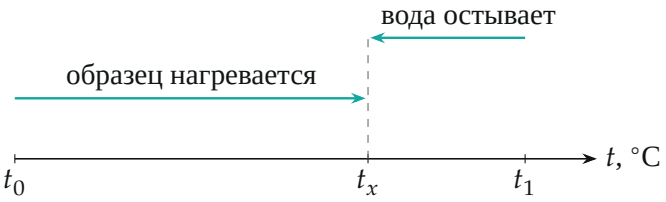
Задача 4. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 4] Работая в секретной военной лаборатории Чебурашка и крокодил Гена синтезировали необычный материал. Его удельная теплоёмкость c зависит от температуры t в шкале Цельсия по закону: $c(t) = c_0\,(1 + \gamma t)$, где $c_0 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град) и $\gamma = 0{,}05$ град$^{-1}$ — известные постоянные. Образец данного материала массой $m = 0{,}5$ кг и начальной температурой $t_0 = 0°\text{C}$ бросают в воду массой $2m$ и температурой $t_1 = 45°\text{C}$. Какая установится температура? Удельная теплоёмкость воды $c = 2c_0 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), потерями тепла пренебречь.



Поясняющий рисунок. Слева — начало: образец массой m при $t_0 = 0°C$ бросают в воду массой $2m$ при $t_1 = 45°C$. Справа — конец: теплообмен закончился, и вода, и образец имеют одну температуру t_x.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Горячая вода отдаёт теплоту, холодный образец её получает. Потерь нет, поэтому вся теплота, которую отдала вода, пошла в образец: $Q_{\text{вод}} = Q_{\text{обр}}$ — это уравнение теплового баланса. Особенность задачи в том, что теплоёмкость образца растёт с температурой: чем он горячее, тем больше теплоты нужно на каждый следующий градус. Поэтому формулу $Q = cm\Delta t$ с одним значением c применять нельзя. Идея: разобьём нагревание образца на малые шаги, на каждом из которых c почти постоянна, и сложим теплоту по шагам — получится площадь под графиком $c(t)$.

Обозначения. t_x — установившаяся температура, °C. К концу теплообмена вода остыла с t_1 до t_x, образец нагрелся с $t_0 = 0$ до t_x. Все температуры берём по шкале Цельсия, как и в формуле для $c(t)$. Теплоёмкость воды постоянна, $c = 2c_0$.



Шкала температур: образец нагревается от $t_0 = 0$ до t_x, вода остывает от t_1 до t_x. В конце температура общая.

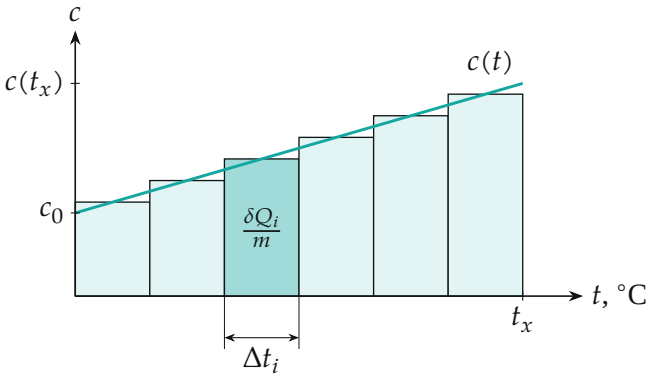
1. Теплота, отданная водой. Теплоёмкость воды не меняется, поэтому применима обычная формула:

$$Q_{\text{вод}} = 2m \cdot 2c_0\,(t_1 - t_x) = 4mc_0\,(t_1 - t_x).$$

2. Теплота, полученная образцом. Разобьём интервал температур от $t_0 = 0$ до t_x на малые участки Δt_i; на каждом можно считать $c \approx c(t_i)$, где t_i — температура на этом участке. Теплота, пошедшая на нагрев образца на участке i, равна $\delta Q_i = m\,c(t_i)\,\Delta t_i$, а на весь интервал — сумме по всем участкам:

$$Q_{\text{обр}} = \sum_i m\,c(t_i)\,\Delta t_i = mc_0\Big(\sum_i \Delta t_i + \gamma \sum_i t_i\,\Delta t_i\Big).$$

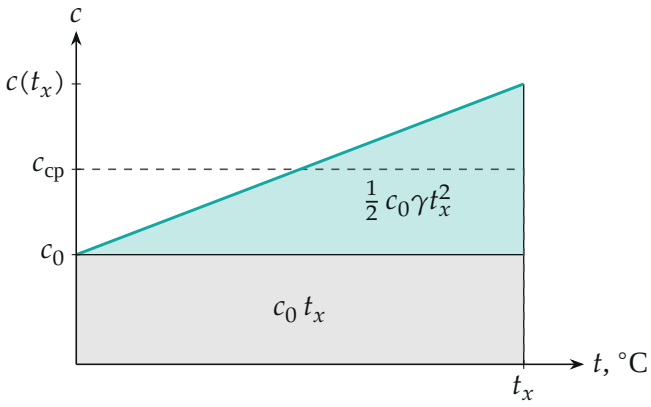
На графике $c(t)$ каждое слагаемое $c(t_i)\Delta t_i$ — площадь узкой полоски, а вся сумма — площадь фигуры под графиком.



Первая сумма в скобках — сумма длин всех участков, то есть t_x. Вторая — сумма площадей полосок высотой t_i и шириной Δt_i под прямой $y = t$ от 0 до t_x: это треугольник, и она равна $t_x^2/2$ (так же вычисляют работу силы упругости: $\sum x_i \Delta x_i = x^2/2$). Получаем

$$Q_{\text{обр}} = mc_0\Big(t_x + \frac{\gamma t_x^2}{2}\Big).$$

На втором рисунке то же самое: трапеция разрезана на прямоугольник высотой c_0 (его площадь $c_0 t_x$) и треугольник (его площадь $\frac{1}{2}c_0\gamma t_x^2$).



Площадь под графиком $c(t)$: прямоугольник плюс треугольник. Пунктиром — равновеликий прямоугольник с высотой $c_{ср}$.

3. Тепловой баланс. Приравняем отданную и полученную теплоту:

$$4mc_0\,(t_1 - t_x) = mc_0\Big(t_x + \frac{\gamma t_x^2}{2}\Big).$$

Масса образца и c_0 сокращаются — числа m и c_0 для ответа не нужны. Умножим на 2 и соберём все слагаемые в одну часть:

$$\gamma t_x^2 + 10\,t_x - 8\,t_1 = 0.$$

Выбираем корень, при котором температура положительна (второй ко-

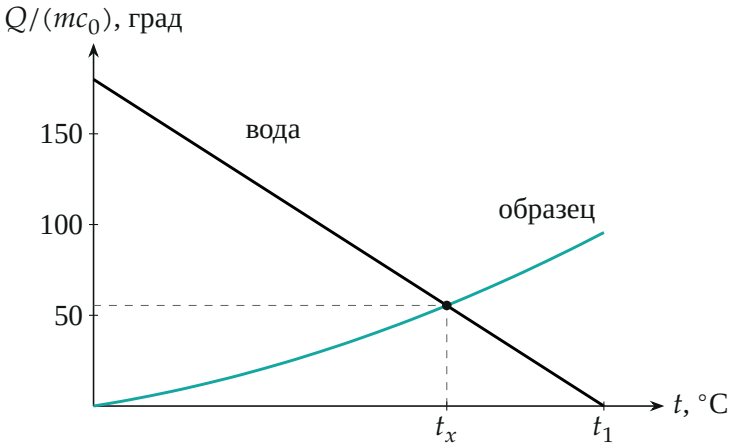
рень отрицателен и физического смысла не имеет):

$$t_x = \frac{-10 + \sqrt{100 + 32\,\gamma t_1}}{2\gamma}.$$

Подставим: $\gamma t_1 = 0{,}05 \cdot 45 = 2{,}25$, $\sqrt{100 + 72} = \sqrt{172} \approx 13{,}115$, и

$$t_x = \frac{13{,}115 - 10}{0{,}1} \approx 31{,}1^\circ\text{C}.$$

Получили $0 < t_x < t_1$, как и должно быть: вода остыла (на 13,9°), образец нагрелся (на 31,1°).



Тепловой баланс на графике: теплота, отданная водой (прямая, убывает с ростом t), и теплота, полученная образцом (парабола, растёт). Они равны в точке $t = t_x$; по вертикали — теплота в единицах mc_0·град.

Обратите внимание: в формулу $Q = cm\Delta t$ нельзя подставить c при какой-то одной температуре — например c_0 (при 0°C) или $c(t_1)$. Теплоёмкость меняется по ходу нагревания, поэтому надо брать её среднее по интервалу.

Второй способ: средняя теплоёмкость. Зависимость $c(t)$ линейная, поэтому среднее значение c по интервалу температур $0 \ldots t_x$ равно зна-

чению в его середине (высота средней линии трапеции на рисунке):

$$c_{\text{ср}} = c\Big(\frac{t_x}{2}\Big) = c_0\Big(1 + \frac{\gamma t_x}{2}\Big).$$

Тогда $Q_{\text{обр}} = mc_{\text{ср}}t_x = mc_0(t_x + \gamma t_x^2/2)$ — то же выражение, а значит, то же уравнение и тот же ответ.

Проверка. Размерность: γt безразмерна (град$^{-1}$ · град), уравнение $\gamma t_x^2 + 10t_x - 8t_1 = 0$ однородно по градусам. Если $\gamma \to 0$ (теплоёмкость постоянна), из квадратного уравнения остаётся $10t_x = 8t_1$, то есть $t_x = 36°\text{C}$ — обычный баланс $4(t_1 - t_x) = t_x$ для образца с c_0. Наш ответ ниже: образцу нужно больше теплоты, чем при постоянной c_0, он сильнее охлаждает воду, и общая температура получается ниже. Численно: $mc_0 = 0{,}5 \cdot 2100 = 1050$ Дж/град, вода отдала $4 \cdot 1050 \cdot 13{,}85 \approx 58{,}2$ кДж, и столько же получил образец (численное суммирование по узким полоскам дало ту же величину).

Физический смысл: у образца теплоёмкость растёт с нагревом, в горячей области он «жаднее» берёт теплоту, поэтому он не успевает нагреться так, как нагрелся бы образец с постоянной c_0.

Ответ. $t_x = \dfrac{-10 + \sqrt{100 + 32\gamma t_1}}{2\gamma} \approx 31{,}1°\text{C}$. (У организаторов 31,2°C: они округлили $\sqrt{172} = 13{,}115$ до 13,12; точно $t_x = 31{,}149\ldots \approx 31{,}1°\text{C}$.)