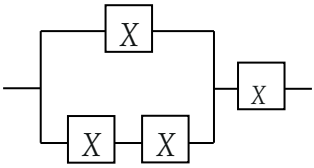
ВАХ цепи из нелинейных элементов

Задача 5. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 5] Элемент X обладает следующей вольтамперной характеристикой (зависимостью тока через него I от приложенного к нему электрического напряжения): $I = \alpha U^2$, где α — известное число. Из четырёх одинаковых элементов X собрали цепь, схема которой приведена на рисунке. Найти её вольтамперную характеристику.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Элементы нелинейные, но правила соединения те же, что для резисторов: при последовательном соединении ток один и тот же, а напряжения складываются; при параллельном напряжение одно и то же, а токи складываются. Складывать «сопротивления» здесь нельзя — ток не пропорционален напряжению. Поэтому пойдём так: зададим ток I всего участка, найдём токи и напряжения на всех элементах и сложим напряжения. Начинаем именно с тока, потому что через элемент 4 течёт весь ток I сразу, а напряжение на элементе выражается через ток однозначно.

Обозначения. Элементы пронумерованы как на рисунке: 1 — верхний, 2 и 3 — нижняя ветвь, 4 — последовательный справа. I, U — ток и напряжение всего участка; I_k, U_k — ток и напряжение на элементе k; I_{23}, U_{23} — ток и напряжение на нижней ветви. Для одного элемента $U = \sqrt{I/\alpha}$ (рассматриваем $U > 0$: полярность, при которой ток идёт слева направо).

1. Элемент 4. Он стоит последовательно со всей параллельной частью, поэтому через него течёт весь ток: $I_4 = I$, и

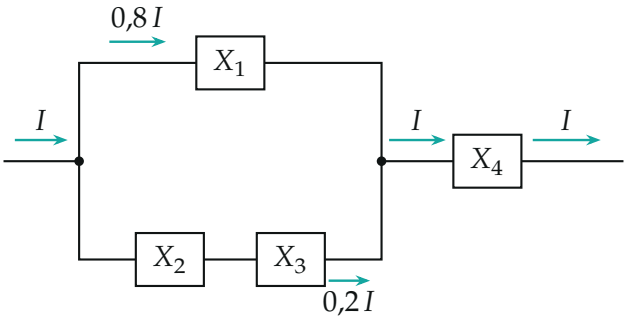
$$U_4 = \sqrt{\frac{I}{\alpha}}.$$

2. Как делится ток. Верхняя ветвь (элемент 1) и нижняя (элементы 2 и 3) подключены к одной паре узлов, поэтому напряжение на них одно: $U_1 = U_{23}$. В нижней ветви элементы 2 и 3 включены последовательно: через них течёт один и тот же ток I_{23}, одинаковые элементы делят напряжение поровну, и на каждом из них напряжение вдвое меньше, чем U_{23}. Значит, на элементе 1 напряжение вдвое больше, чем на элементе 2. Ток пропорционален квадрату напряжения, поэтому

$$I_1 = 4\,I_{23}.$$

Сумма токов, втекающих в узел, равна сумме вытекающих (сохранение заряда в узле): $I_1 + I_{23} = I$. Отсюда

$$I_1 = \frac{4}{5}\,I, \qquad I_{23} = \frac{1}{5}\,I.$$



Токи в цепи. На всём участке и на элементе 4 течёт I; верхняя ветвь пропускает $0{,}8\,I$, нижняя — $0{,}2\,I$.

3. Напряжения. Из ВАХ одного элемента получаем напряжение на элементе 1:

$$U_1 = \sqrt{\frac{I_1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{4I}{5\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{I}{\alpha}}.$$

Проверим, что нижняя ветвь даёт то же:

$$U_{23} = 2\sqrt{\frac{I_{23}}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{I}{5\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{I}{\alpha}}.$$

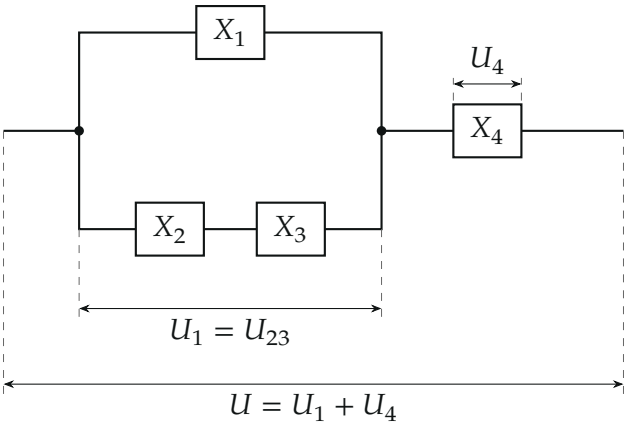
Совпало, значит, соотношение $I_1 = 4I_{23}$ найдено верно.

4. Напряжение всего участка и ВАХ. Параллельная часть и элемент 4 соединены последовательно, поэтому напряжения складываются:

$$U = U_1 + U_4 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right)\sqrt{\frac{I}{\alpha}} = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{I}{\alpha}}.$$

Неизвестным осталось выразить I через U: возведём в квадрат,

$$U^2 = \frac{(2+\sqrt{5})^2}{5}\cdot\frac{I}{\alpha} \quad\Rightarrow\quad I = \frac{5\alpha}{(2+\sqrt{5})^2}U^2.$$

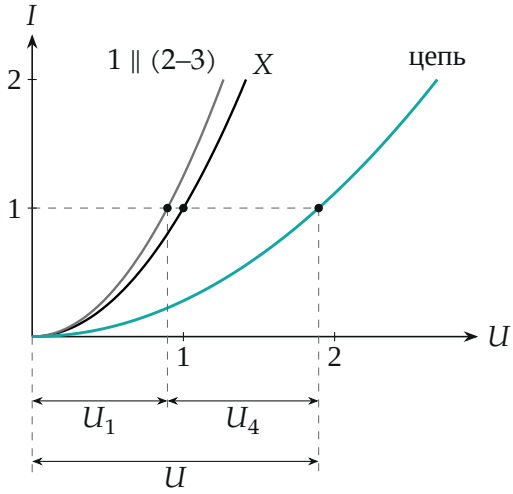


Напряжения: на параллельной части $U_1 = U_{23}$, на элементе 4 — U_4; их сумма — напряжение всего участка.

Обратите внимание: нельзя разделить ток поровну между ветвями (параллельные ветви равны по напряжению, но не по току: ветвь 1 — один элемент, ветвь 2–3 — два последовательных, у них разные ВАХ) и

нельзя складывать коэффициенты α при последовательном соединении, как складывают проводимости при параллельном.

Сложение напряжений при одном и том же токе видно и на графиках ВАХ (рисунок ниже): напряжение цепи — это напряжение параллельной части плюс напряжение элемента 4.



ВАХ при $\alpha = 1$ (в условных единицах): одного элемента X, параллельной части 1 и (2–3) и всей цепи. При токе $I = 1$ напряжения: $U_1 = 0{,}894$, $U_4 = 1$, $U = 1{,}894$.

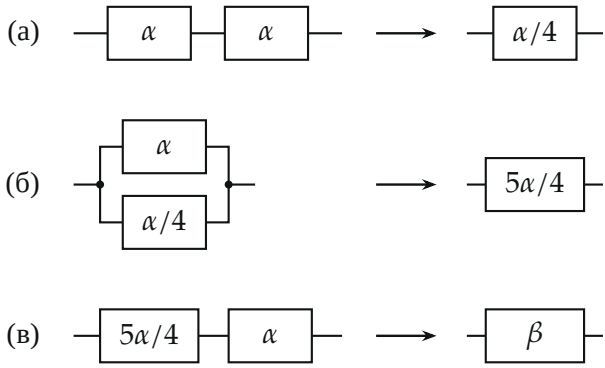
Второй способ: эквивалентный коэффициент. Участок, ВАХ которого $I = \beta U^2$, назовём «элементом с коэффициентом β». При последовательном соединении ток один, а напряжения складываются: $U = \sqrt{I}\,(1/\sqrt{\beta_1} + 1/\sqrt{\beta_2})$, то есть складываются величины $1/\sqrt{\beta}$. При параллельном напряжение одно, а токи складываются, поэтому складываются сами β. Применим по шагам (рисунок ниже):

- элементы 2 и 3 последовательно: $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}} = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$, $\beta = \dfrac{\alpha}{4}$;
- параллельно с элементом 1: $\beta = \alpha + \dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{5\alpha}{4}$;

• последовательно с элементом 4: $\dfrac{1}{\sqrt{\beta_ц}} = \dfrac{2}{\sqrt{5\alpha}} + \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} = \dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5\alpha}}$,

откуда $\beta_ц = \dfrac{5\alpha}{(2+\sqrt{5})^2}$.

Тот же ответ.



Последовательное преобразование: (а) 2 и 3 последовательно; (б) параллельно элементу 1; (в) последовательно с элементом 4; $\beta = \beta_ц$.

Проверка. Размерность: α — это А/В^2, и у ответа та же размерность. Численно $\dfrac{5}{(2+\sqrt{5})^2} = 5(\sqrt{5}-2)^2 = 45 - 20\sqrt{5} \approx 0{,}279$ (здесь $(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2) = 1$). Границы: если убрать нижнюю ветвь, останутся элементы 1 и 4 последовательно, $\beta = \alpha/4 = 0{,}25\alpha$; если заменить параллельную часть проводом, останется один элемент 4, $\beta = \alpha$. Наш ответ $0{,}279\alpha$ лежит между ними — чуть выше первого значения, потому что нижняя ветвь слабая (пропускает лишь $0{,}2\,I$) и добавляет совсем немного. Численная проверка: при $\alpha = 1$ и $I = 1$ получаем $U = 1{,}894$, и $0{,}279 \cdot 1{,}894^2 = 1{,}00$, как должно быть.

Физический смысл: из-за элемента 4, стоящего последовательно, вся цепь проводит ток хуже одного элемента X — в $1/0{,}279 \approx 3{,}6$ раза при том же напряжении.

Ответ. $I = \dfrac{5\alpha}{(2+\sqrt{5})^2}U^2 = (45 - 20\sqrt{5})\,\alpha U^2 \approx 0{,}28\,\alpha U^2$ (при $U > 0$).