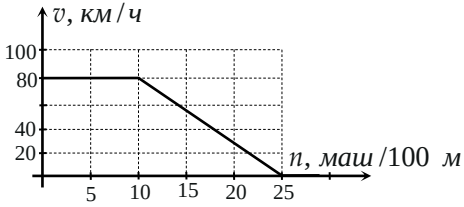
Пропускная способность шоссе

Задача 6. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 6] При исследовании автомобильных пробок инженерам-дорожникам приходится рассчитывать пропускные способности дорог, максимальное количество машин, которые могут проехать по тому или иному участку дороги, причём исходя из возможностей и предпочтений усреднённого водителя. Пусть по прямому участку шоссе движется поток машин. Их скорости одинаковы и не меняются с течением времени. Дан график зависимости скорости, с которой едут машины в потоке v (в километрах в час), от числа машин n, приходящихся на 100 м дороги. Какое максимальное количество машин может проехать за 1 час около некоторой отметки на дороге?

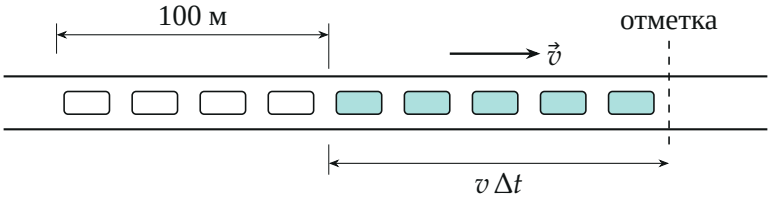


▲ **Решение.** **Что происходит.** Число машин, проезжающих отметку за час, зависит и от того, сколько их на дороге (n), и от того, как быстро они едут (v). График связывает эти величины навстречу друг другу: чем больше машин, тем медленнее поток. При малых n дорога почти пуста и мимо отметки проезжает мало машин, при $n = 25$ скорость нулевая — пробка, не проезжает ни одна. Значит, между этими крайностями есть наилучшая загруженность n_0. Главная идея: число машин пропорционально произведению $v \cdot n$, поэтому нужно найти максимум этого произведения по графику.

Обозначения. n — число машин на 100 м, v — скорость потока в км/ч, Δt — время наблюдения в часах, N — число машин, проехавших отметку за Δt.

1. Сколько машин проезжает отметку. Все машины едут с одной и той же постоянной скоростью v, поэтому расстояния между ними не

меняются и вся картина просто сдвигается вдоль дороги. За время Δt мимо отметки успеют проехать те машины, которые вначале были позади неё на расстоянии не больше $v\Delta t$ (на рисунке они бирюзовые); более далёкие не доедут.

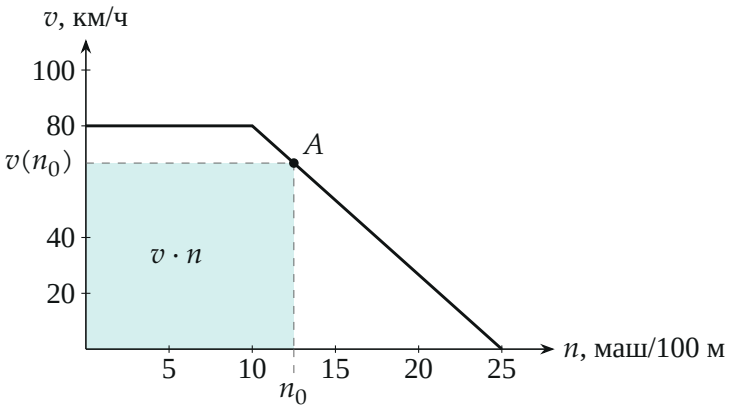


Поток с $n = 4$ машины на 100 м. За Δt мимо отметки проедут пять машин: на участке длиной $v\Delta t$ их $4 \cdot v\Delta t\,/\,(100\text{ м}) = 5$.

На каждые 100 м участка приходится n машин. Скорость дана в км/ч, время в часах, поэтому $v\Delta t$ — длина в километрах, а в сотнях метров она в десять раз больше. Получаем

$$N = n \cdot 10\, v\, \Delta t.$$

Для $\Delta t = 1$ ч это $N = 10\, v(n)\, n$, и нужно найти максимум произведения $v(n)\, n$. На графике оно равно площади прямоугольника со сторонами n и $v(n)$, один угол которого в начале координат, а противоположный лежит на графике.

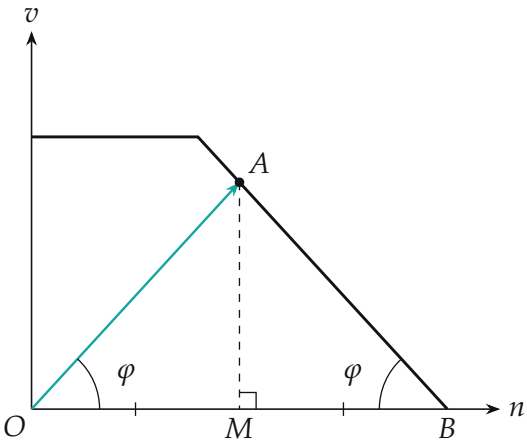


2. Условие максимума. Приравняем нулю производную произведения по n:

$$\frac{d}{dn}(v\,n) = v + n\,v' = 0 \quad \Rightarrow \quad v'(n) = -\frac{v(n)}{n}.$$

Геометрически: по модулю угол наклона касательной к графику равен углу наклона прямой, проведённой в эту точку из начала координат; знаки противоположны, потому что $v(n)$ убывает.

3. Где это выполняется. До $n = 10$ скорость постоянна, $v\,n = 80\,n$ растёт вместе с n, поэтому максимум правее излома. Правее график — прямая от точки $(10;\,80)$ до точки $B = (25;\,0)$, её наклон $v' = -80/15 = -16/3$ (км/ч на одну машину на 100 м). Касательная к прямой — она сама. Значит, в треугольнике OAB углы при вершинах O и B равны, и он равнобедренный: $OA = AB$.



Треугольник OAB: касательная к графику — сам отрезок AB, а хорда OA проведена из начала координат в точку A. Равенство углов φ даёт $OM = MB$.

Высота равнобедренного треугольника, опущенная из вершины A, падает на середину основания OB. Значит, точка M — середина OB, то есть

$$n_0 = \frac{OB}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ маш/100 м}.$$

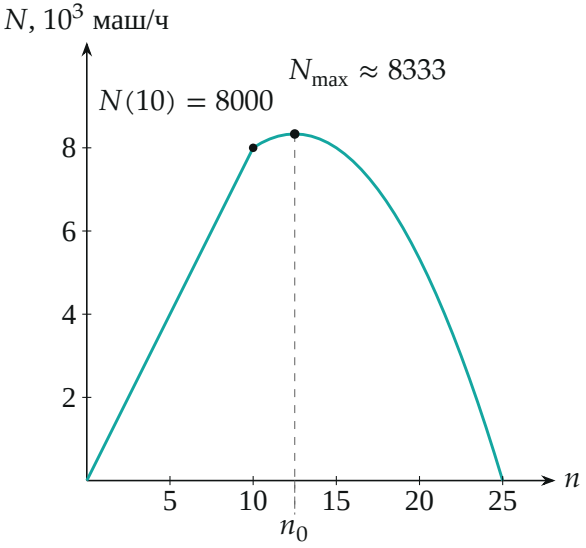
Это число лежит на прямом участке графика ($10 < 12{,}5 < 25$), так что предположение о форме графика выполнено.

Обратите внимание: максимум не там, где скорость наибольшая, и не на изломе графика. При $n = 10$ получаем $N = 10 \cdot 80 \cdot 10 = 8000$, а при $n = 12{,}5$ — больше. Справа от излома скорость падает медленнее, чем растёт число машин: в точке $n = 10+$ производная $v + nv' = 80 - \frac{160}{3} \approx 26{,}7 > 0$, и произведение ещё растёт.

4. Число машин. На прямом участке $v(n) = \dfrac{16}{3}\,(25 - n)$, поэтому

$$v(n_0) = \frac{16}{3} \cdot 12{,}5 = \frac{200}{3} \approx 66{,}7 \text{ км/ч},$$

$$N_{\max} = 10 \cdot \frac{200}{3} \cdot 12{,}5 = \frac{25000}{3} \approx 8{,}3 \cdot 10^3.$$



Число машин $N(n) = 10\,v(n)$ n за час. Левее излома график идёт по прямой, правее — по параболе с вершиной в n_0.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{маш}}{100\text{ м}} \cdot \dfrac{100\text{ м}}{\text{км}} \cdot \dfrac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \text{ч} = \text{маш}$, множитель 10 нужен именно для перевода «100 м» в километры. Второй способ —

аналитически: на участке $10 \leqslant n \leqslant 25$

$$N = 10\,n \cdot \frac{16}{3}(25 - n) = \frac{160}{3}\,n\,(25 - n)$$

— парабола с ветвями вниз и нулями в $n = 0$ и $n = 25$; её вершина в середине между корнями, $n_0 = 12{,}5$, и $N_{\max} = \dfrac{160}{3} \cdot 12{,}5^2 = \dfrac{25000}{3}$, как и выше. Крайние случаи тоже понятны: при $n \to 0$ дорога пуста, при $n \to 25$ скорость падает до нуля — в обоих случаях $N \to 0$.

Физический смысл: оптимальная загрузка — одна машина на 8 м дороги (100 м/12,5) при скорости около 67 км/ч; если ввести на шоссе больше машин, они замедляют друг друга быстрее, чем их число растёт, и пропускная способность падает.

Ответ. $N_{\max} = \dfrac{25000}{3} \approx 8{,}3 \cdot 10^3$ машин в час; она достигается при $n_0 = 12{,}5$ машины на 100 м и скорости $v \approx 66{,}7$ км/ч. (У организаторов 8337,5: они умножили округлённое $v = 66{,}7$ км/ч, $10 \cdot 66{,}7 \cdot 12{,}5 = 8337{,}5$; точно $10 \cdot \frac{200}{3} \cdot 12{,}5 \approx 8333$.)