Полиспасты с выигрышем в 3 и 5 раз

Задача 2. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 2] Имеются произвольные — подвижные (левый рисунок) или неподвижные (центральный рисунок) блоки и неограниченное количество верёвки (правый рисунок). Подвижный блок позволяет получить двукратный выигрыш в силе, неподвижный — поменять направление приложения усилия. Предложите подъёмные механизмы, использующие подвижные и неподвижные блоки, которые будут давать выигрыш в силе в три раза и в пять раз. Задействуйте как можно меньшее число элементов. Можно использовать блоки разных радиусов, закреплять блоки разных радиусов на одной оси и т.д. В качестве решения нарисуйте предложенную схему соединения верёвок и блоков и обоснуйте увеличение силы.

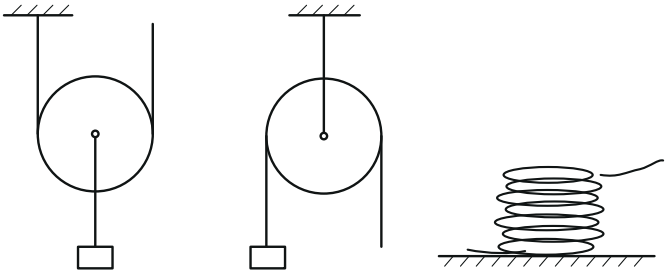


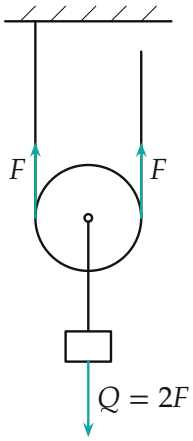
Рисунок условия: подвижный блок (слева), неподвижный блок (в центре) и бухта верёвки (справа). Бухта на оригинале нарисована от руки; здесь она показана стопкой витков.

▲ **Решение. Что происходит.** Блоки и верёвку считаем идеальными: у блока нет массы и трения, верёвка невесома и нерастяжима. Тогда сила натяжения вдоль всей верёвки одна и та же. Груз с подвижными блоками уравновешивается суммой сил натяжения всех участков верёвки, которые уходят вверх от подвижной части. Значит, выигрыш в силе равен числу таких участков (ветвей), и задача сводится к тому, чтобы собрать из блоков схему с тремя или пятью ветвями, потратив как можно меньше блоков. Главная идея: каждая ветвь даёт F — считаем ветви.

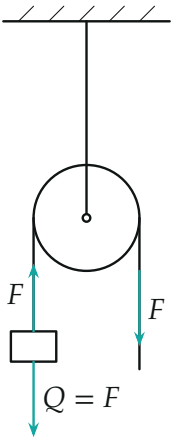
Обозначения. F — сила, с которой тянут свободный конец верёвки (она же натяжение верёвки); Q — вес груза вместе с подвижными блоками (массу блоков и верёвки не учитываем); $n = Q/F$ — выигрыш в силе.

1. Что даёт один блок. Запишем правило моментов для блока: он невесом, поэтому сумма моментов сил, действующих на него, равна нулю при любом движении. Моменты сил натяжения двух частей верёвки относительно оси равны $T_1 r$ и $T_2 r$, значит $T_1 = T_2$: на обоих концах дуги, охватывающей блок, натяжение одинаково. Отсюда:

- неподвижный блок: груз Q висит на одном конце верёвки, второй конец тянут вниз. Условие равновесия груза даёт $Q = F$: выигрыша нет, меняется только направление силы;
- подвижный блок: к нему идут две ветви верёвки, обе вверх с натяжением F, а вес груза тянет вниз. Условие равновесия блока с грузом даёт $2F = Q$, то есть $n = 2$.



а) подвижный блок



б) неподвижный блок

Силы в двух простейших случаях. Бирюзовые стрелки у блока — силы, с которыми верёвка действует на блок и груз; Q — вес груза.

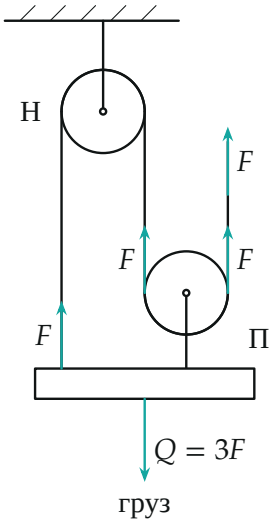
2. Правило подсчёта. Подвижная часть — груз вместе с подвижными блоками. Верёвка действует на неё силой F по каждой ветви, которая

идёт к подвижной части от неподвижной опоры или от неподвижного блока. Поэтому

$$Q = nF,$$

где n — число ветвей верёвки, идущих вверх от подвижной части. Ветви считаются так: каждый подвижный блок, охваченный верёвкой, даёт две ветви; конец верёвки, привязанный прямо к грузу или к оси подвижного блока, даёт одну; конец, привязанный к потолку, не даёт ни одной, потому что тянет вверх потолок, а не груз. Нужно $n = 3$ и $n = 5$: это $1 + 2$ и $1 + 2 + 2$, то есть один привязанный к грузу конец и один или два подвижных блока.

3. Трёхкратный выигрыш: два блока. Привяжем конец верёвки к грузу и перекинем её через неподвижный блок Н на потолке, затем опустим вниз, обведём снизу подвижный блок П, подвешенный к грузу, и поведём конец вверх — здесь тянет рука. Верёвка идёт тремя вертикальными участками: привязанный к грузу, от Н вниз к П и от П вверх к руке. Все три тянут груз вверх с силой F.



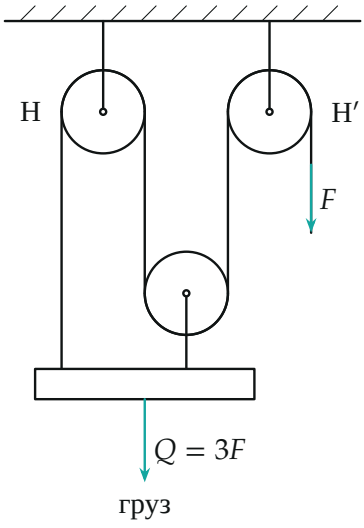
Подъём в три раза: неподвижный блок Н *и подвижный блок* П *(два блока). Три ветви верёвки тянут подвижную часть вверх с силой F, свободный конец тянут вверх с силой F.*

Запишем условие равновесия подвижной части (груз и блок П) в проекции на вертикаль: три силы F вверх, вес Q вниз:

$$F + F + F - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 3F.$$

Обратите внимание: ветвь, идущая от неподвижного блока Н вниз к П, тоже считается: она тянет подвижную часть вверх, хотя верёвка на блоке Н только развернулась.

Из простых блоков (каждое колесо — одного радиуса и на своей оси) меньше двух не получится. Верёвка, привязанная к грузу, идёт от него вверх, и чтобы вернуться вниз к блоку П, её нужно развернуть неподвижным блоком. Если же конец верёвки привязан к потолку, ветвей получается только две. Если нужно тянуть вниз, как предлагает официальное решение, достаточно поставить ещё один неподвижный блок Н′ справа: верёвка от П уходит вверх, огибает Н′ и идёт вниз. Выигрыш не меняется, потому что число ветвей на подвижной части то же, но блоков уже три.

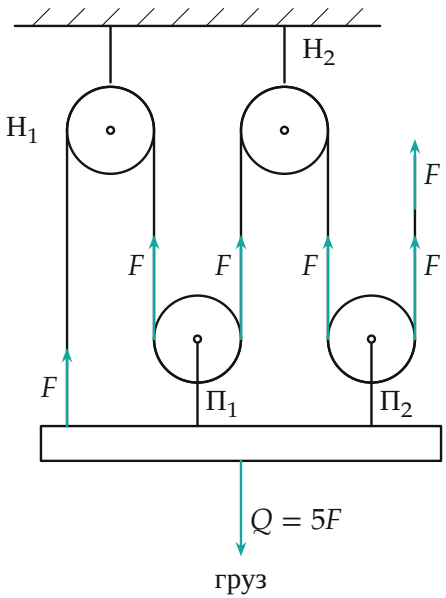


Та же схема с тягой вниз: добавлен неподвижный блок Н′ (три блока); три ветви на подвижной части сохранились.

4. Пятикратный выигрыш: четыре блока. Нужно пять ветвей: $1 + 2 + 2$, то есть конец, привязанный к грузу, и два подвижных блока. Между двумя охватываемыми блоками верёвку нужно развернуть: вверх от первого блока и снова вниз ко второму. Для этого нужен неподвижный блок, причём верёвка идёт по нему дважды — до первого подвижного блока и между подвижными блоками. Два прохода по одному колесу невозможны, поэтому ставим два блока на одну ось (допустимо и с разными радиусами). Всего блоков четыре: два неподвижных $Н_1, Н_2$ и два подвижных $П_1, П_2$.

Путь верёвки: от груза вверх (ветвь 1), через $Н_1$, вниз к $П_1$ (ветвь 2), под ним и вверх (ветвь 3), через $Н_2$, вниз к $П_2$ (ветвь 4), под ним и вверх к руке (ветвь 5). Пять вертикальных ветвей тянут подвижную часть вверх, поэтому по условию равновесия

$$5F - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 5F.$$



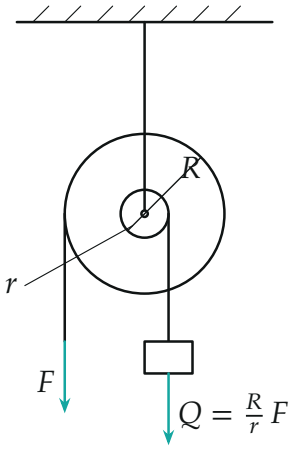
Подъём в пять раз: два неподвижных блока $Н_1, Н_2$ (на одной оси или рядом) и два подвижных $П_1, П_2$, закреплённых на грузе. Пять ветвей верёвки тянут подвижную часть вверх с силой F.

Обратите внимание: если конец верёвки привязать не к грузу, а к потолку, он ветвью не считается, и из той же четвёрки блоков получится выигрыш 4, а не 5.

5. Блоки разных радиусов на одной оси: ещё меньше элементов. Условие прямо разрешает скрепить на одной оси два колеса разных радиусов — это ворот (ступенчатый блок). Зачем: тогда выигрыш даёт не число ветвей, а отношение плеч, и хватает одного элемента. На большое колесо радиуса R намотаем и закрепим верёвку, за которую тянет рука, на малое радиуса r — в другую сторону — верёвку с грузом. Колесо невесомо и покоится, поэтому по правилу моментов относительно оси

$$FR - Qr = 0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{Q}{F} = \frac{R}{r}.$$

Для выигрыша в три и пять раз берём $r = \frac{R}{3}$ и $r = \frac{R}{5}$: один неподвижный ступенчатый блок. Знак: моменты противоположны, потому что верёвки сходят с колёс по разные стороны от оси.



Ступенчатый блок (ворот): на одной оси колёса радиусов R и r, верёвки закреплены на колёсах. Правило моментов: $FR = Qr$.

Сопоставим со схемами из простых блоков: те дают выигрыш только целым числом ветвей, а ступенчатый блок — любой, но рука проходит путь в R/r раз больше пути груза (тот же закон, что и в проверке ниже).

Есть и дифференциальный полиспаст: ступенчатый неподвижный блок и подвижный блок под ним, его выигрыш $\frac{2R}{R-r}$ (5 при $r = 0{,}6R$); он тоже из двух элементов, но проще ворота не становится. Поэтому ответ даём в двух вариантах: из простых блоков — два и четыре блока, с блоками разных радиусов — один ступенчатый блок.

Проверка: второй способ — энергия. Идеальные блоки работы не теряют, поэтому работа тянущей силы равна приращению потенциальной энергии груза. Пусть груз поднялся на h. Каждая из n ветвей, идущих вверх от подвижной части, стала короче на h, а длина верёвки не изменилась, поэтому свободный конец надо вытянуть на nh. Тогда $F \cdot nh = Q \cdot h$, откуда $Q = nF$: тот же ответ без разбора сил. Для $n = 3$ и $n = 5$ получаем 3 и 5 м вытянутой верёвки на каждый метр подъёма. Физический смысл: выигрыш в силе покупается проигрышем в пути в то же число раз.

Ответ. Выигрыш в силе равен числу ветвей верёвки, идущих вверх от подвижной части. 3 раза: верёвка привязана к грузу, идёт через неподвижный блок, затем под подвижным блоком на грузе — два блока. 5 раз: верёвка привязана к грузу, идёт через неподвижный блок, под первым подвижным, через второй неподвижный и под вторым подвижным — четыре блока (два неподвижных, два подвижных). С блоками разных радиусов на одной оси хватает одного ступенчатого блока (ворота): $n = R/r$, то есть $r = R/3$ и $r = R/5$.