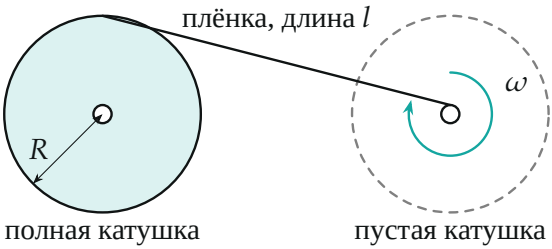
Перемотка киноплёнки

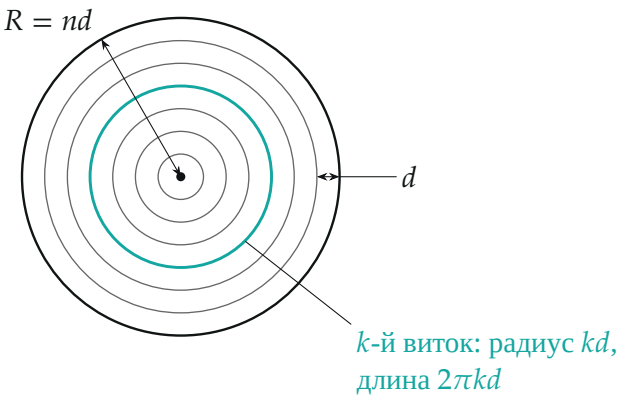
Задача 3. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 3] Кинофильм записан на плёнке, которая намотана на катушку. За какое время плёнка перемотается на другую точно такую же катушку, если вращать принимающую катушку с постоянной угловой скоростью ω? Длина плёнки l, радиус пустой катушки R. Толщина плёнки много меньше диаметра катушки.



Поясняющий рисунок: плёнка перематывается с полной катушки (радиус R) на пустую такую же; принимающую катушку вращают с постоянной ω. Пунктир — края пустой катушки, до которых она заполнится.

▲ **Решение. Что происходит.** Принимающая катушка вращается с постоянной угловой скоростью, поэтому каждый её оборот занимает одно и то же время $T = 2\pi/\omega$. Но по мере намотки рулон толстеет, и за один оборот на него уходит всё больше плёнки: скорость плёнки ωr растёт вместе с радиусом рулона r. Время перемотки — это число оборотов, умноженное на период, а число оборотов найдём из длины плёнки, посчитав длину витков. Главная идея: длина плёнки равна сумме длин всех витков, а радиусы витков растут по арифметической прогрессии.

Модель и обозначения. Толщина плёнки $d \ll R$, поэтому спираль заменяем концентрическими окружностями: k-й виток имеет радиус kd. Радиус R понимаем как радиус катушки, до которого плёнка заполняет её, то есть радиус полного рулона; сердцевину считаем пренебрежимо тонкой — так делается и в решении организаторов. n — число витков на полной катушке, T — время одного оборота.



Поперечный разрез рулона: n витков, каждый добавляет к радиусу толщину d (на рисунке d сильно преувеличена). Выделен k-й виток.

1. Число витков и радиус. Каждый виток увеличивает радиус рулона на d, а на полной катушке радиус равен R, значит

$$R = nd. \tag{1}$$

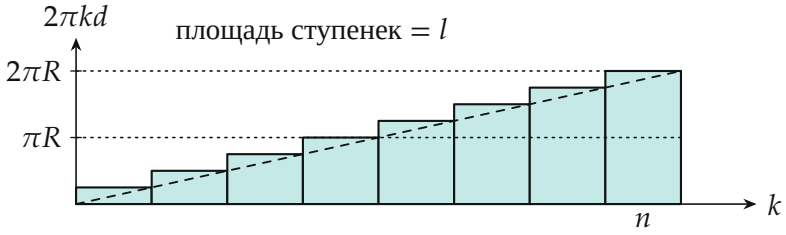
2. Длина плёнки как сумма длин витков. Длина k-го витка — это длина окружности радиуса kd, то есть $2\pi kd$. Вся плёнка состоит из n витков, поэтому

$$l = 2\pi d\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2\pi d\,\frac{n(n+1)}{2} \approx \pi d\,n^2.$$

Здесь $n \gg 1$, ведь $n = R/d$ и $d \ll R$; тогда $n + 1 \approx n$, и относительная ошибка равна $1/n$. Подставим $d = R/n$ из (1):

$$l = \pi R\,n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{l}{\pi R}. \tag{2}$$

Средняя длина витка равна πR, то есть половине длины внешнего: витки растут от нуля до $2\pi R$ равномерно.

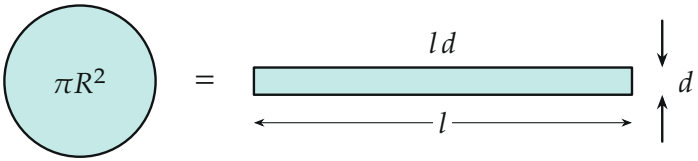


Длины витков: высота k-й ступеньки равна $2\pi kd$, сумма площадей ступенек — длина плёнки l. Ступенчатая фигура почти совпадает с треугольником площади $\frac{1}{2}\cdot n\cdot 2\pi R=\pi Rn$, откуда (2).

Число витков можно получить и без суммы, из площади. Плёнка не сжимается, поэтому площадь сечения рулона, круга πR^2, равна площади сечения плёнки, вытянутой в ленту длины l и толщины d:

$$\pi R^2 = l\,d \quad\Rightarrow\quad d=\frac{\pi R^2}{l}, \qquad n=\frac{R}{d}=\frac{l}{\pi R},$$

то есть снова (2).



Площадь сечения не меняется, когда плёнку вытягивают в ленту: круг радиуса R и прямоугольник $l\times d$ равны по площади (толщина d преувеличена).

3. Время перемотки. Принимающая катушка вращается равномерно, значит все n оборотов длятся одинаково: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Обратите внимание: время оборота не зависит от радиуса рулона, а вот скорость плёнки растёт — именно поэтому нельзя делить l на одну скорость. Время перемотки

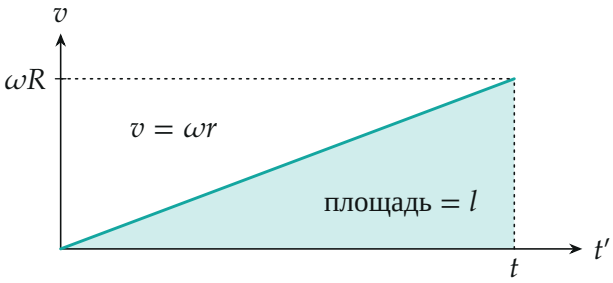
$$t=nT=\frac{l}{\pi R}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2l}{R\omega}. \qquad (3)$$

Второй способ: через скорость плёнки. В момент t' радиус рулона равен $r(t')$, а скорость плёнки $v=\omega r$. Радиус растёт на d за каждый

оборот, то есть пропорционально времени: от 0 до R за время t. Значит $r = Rt'/t$ и $v = \omega R\, t'/t$ — линейная функция. Длина плёнки — путь, то есть площадь под графиком $v(t')$, площадь треугольника:

$$l = \frac{1}{2}\, t \cdot \omega R \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2l}{R\omega},$$

тот же ответ. Физический смысл: средняя скорость плёнки равна $\frac{1}{2}\omega R$, вдвое меньше скорости края полной катушки.



Скорость плёнки при перемотке растёт линейно от нуля до ωR; путь l — площадь закрашенного треугольника.

Обратите внимание: ответ не содержит толщины плёнки d — она вошла и в число витков, и в длину и сократилась через $R = nd$. Но он зависит от трактовки R: для сердцевины радиуса R_0 при том же внешнем радиусе R из $l\,d = \pi(R^2 - R_0^2)$ и $n = (R - R_0)/d$ получаем $t = \dfrac{2l}{\omega\,(R + R_0)}$; при $R_0 \to 0$ это ответ (3).

Проверка. Размерность: $R\omega$ — скорость, м/с, поэтому $l/(R\omega)$ — секунды. Предел: если сердцевина имеет радиус $R_0 \to R$ (очень тонкий слой), скорость плёнки постоянна, $v = \omega R$, и $t = l/(\omega R)$ — формула с R_0 даёт именно это. Для сплошного рулона $R_0 = 0$ время вдвое больше, ведь средняя скорость вдвое меньше. Счёт по виткам для $l = 1000$ м, $R = 1$ м, $\omega = 2$ с$^{-1}$ даёт $t \approx 998{,}4$ с против 1000 с по формуле: расхождение 0,16 % — отброшенное $+1$ в $n(n+1)$.

Ответ. $t = \dfrac{2l}{R\omega}$ (R — радиус полного рулона).