Элемент с ВАХ и резистор

Задача 5. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 5] Вольтамперная характеристика (зависимость тока от напряжения) для некоторого элемента электрической цепи приведена на графике. Такой элемент (обозначен буквой Э на схеме цепи) с последовательно соединённым сопротивлением r подключают к источнику постоянной ЭДС ε. Найти напряжение на элементе и силу электрического тока, протекающего через него. Сопротивлением источника пренебречь. Величины I_0 и U_0 известны.

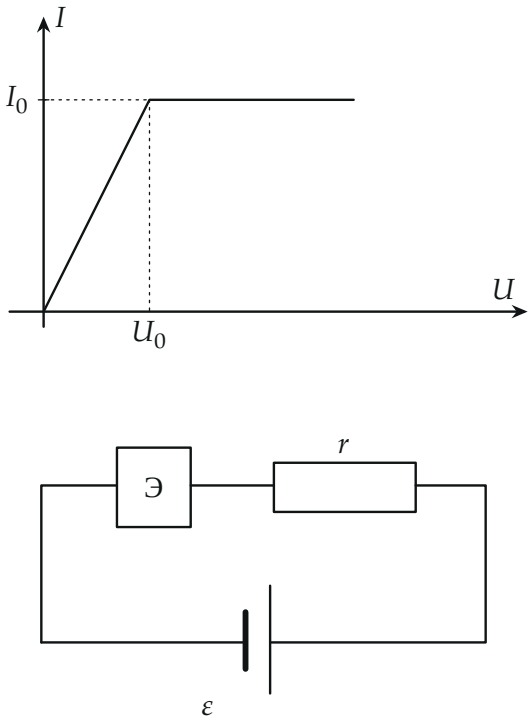
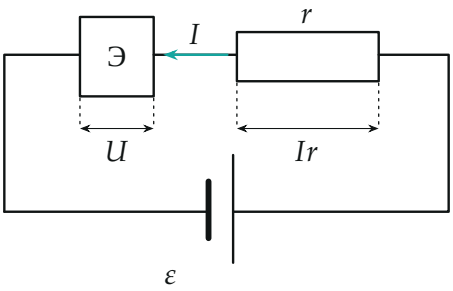


Рисунок условия: ВАХ элемента Э (ток растёт пропорционально напряжению до I_0, затем остаётся равным I_0) и схема цепи: элемент Э, резистор r и источник ε последовательно.

▲ **Решение. Что происходит.** У элемента Э два режима: пока ток меньше I_0, ток пропорционален напряжению (участок ВАХ — наклонная

прямая, элемент ведёт себя как резистор с сопротивлением U_0/I_0), а дальше ток остаётся равным I_0, сколько бы ни росло напряжение. Резистор r стоит последовательно, поэтому ток через оба элемента один, а напряжения на них складываются в ε. Заранее неясно, в каком режиме окажется элемент, — это зависит от ε. Класс задачи: перебор режимов, предположение, затем проверка. Главная идея — записать закон Ома для замкнутой цепи, а недостающую связь между током и напряжением взять с графика.

Обозначения. I — ток в цепи (он же ток через элемент и через резистор), U — напряжение на элементе Э, $\varepsilon_* = U_0 + rI_0$ — значение ЭДС, которое окажется границей режимов.



Ток I в цепи идёт от положительной клеммы источника (длинная пластина) по цепи; напряжение на элементе U и на резисторе Ir в сумме дают ε.

1. Закон Ома для замкнутой цепи. Внутреннее сопротивление источника равно нулю, поэтому сумма напряжений на элементе и на резисторе равна ЭДС:

$$\varepsilon = U + Ir. \qquad (1)$$

Уравнение одно, а неизвестных две (U и I); вторую связь даёт ВАХ элемента.

2. Предположим линейный участок. Пока $I \le I_0$, ВАХ — прямая через начало координат и точку (U_0, I_0): $I = \dfrac{I_0}{U_0} U$. Подставим в (1):

$$\varepsilon = U + r\frac{I_0}{U_0} U = U\frac{U_0 + rI_0}{U_0} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{\varepsilon U_0}{U_0 + rI_0}, \qquad I = \frac{\varepsilon I_0}{U_0 + rI_0}.$$

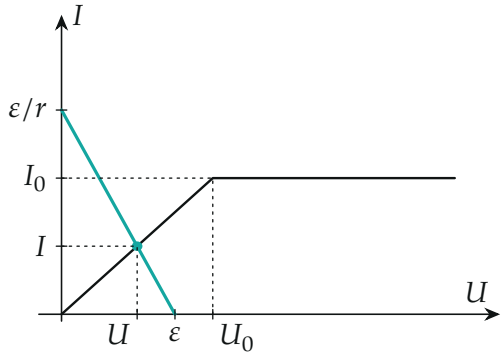
Это верно, только если предположение выполнено, то есть $I \le I_0$ и $U \le U_0$. Из формулы для I видно, что $I \le I_0$ равносильно $\varepsilon \le U_0 + rI_0 = \varepsilon_*$.

3. Большая ЭДС. При $\varepsilon > \varepsilon_*$ линейный участок дал бы $I > I_0$, а такого тока у элемента не бывает: на горизонтальном участке ВАХ ток равен I_0 при любом $U \ge U_0$. Значит, $I = I_0$, и напряжение на элементе находим из (1):

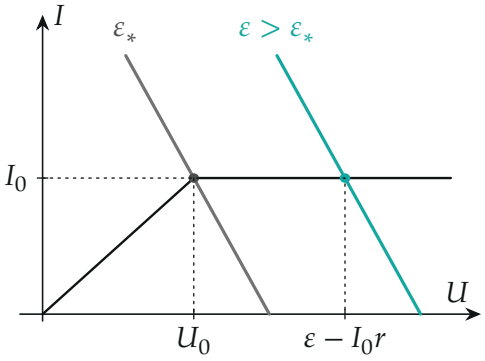
$$U = \varepsilon - I_0 r.$$

Проверка предположения: $U > U_0$ при $\varepsilon > U_0 + rI_0$, то есть мы на горизонтальном участке, как и предполагали. Обратите внимание: при $\varepsilon > \varepsilon_*$ ток уже не растёт — вся добавка к ЭДС достаётся элементу: U растёт вместе с ε на тот же вольт.

Графическое решение: второй способ. Равенство (1) можно записать как $I = (\varepsilon - U)/r$: на плоскости (U, I) это прямая («нагрузочная прямая») с наклоном $-1/r$; она пересекает ось U в точке ε и ось I в точке ε/r. По (1) режим цепи — точка на этой прямой, а по ВАХ — точка на ВАХ; значит, режим — точка пересечения.



Случай $\varepsilon < \varepsilon_*$ (рисунок для $U_0 = I_0 = 2$, $r = 0{,}5$ в условных единицах, $\varepsilon = 1{,}5$): нагрузочная прямая (бирюза) пересекает наклонный участок ВАХ в точке (U, I).



Нагрузочная прямая при $\varepsilon = \varepsilon_*$ (серая) проходит через излом ВАХ (U_0, I_0). При $\varepsilon > \varepsilon_*$ (бирюза) прямая пересекает горизонтальный участок: ток равен I_0, а напряжение на элементе $\varepsilon - I_0 r$ больше U_0.

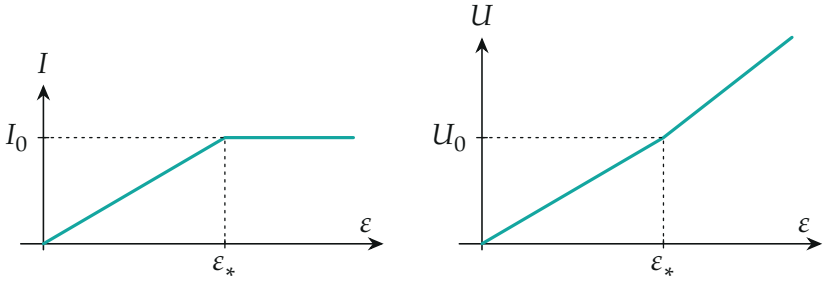
Граница режимов видна на рисунке: нагрузочная прямая проходит через точку излома, когда она пересекает ось U в точке $\varepsilon_* = U_0 + rI_0$.

Итог по режимам. Соберём ответ из найденного: при $\varepsilon \le U_0 + rI_0$

$$I = \frac{\varepsilon I_0}{U_0 + rI_0}, \qquad U = \frac{\varepsilon U_0}{U_0 + rI_0};$$

при $\varepsilon \ge U_0 + rI_0$

$$I = I_0, \qquad U = \varepsilon - I_0 r.$$



а) ток $I(\varepsilon)$ б) напряжение $U(\varepsilon)$

Зависимость от ЭДС: ток растёт линейно до I_0 и дальше постоянен (а); напряжение на элементе растёт до U_0 медленнее, а после излома — на каждый вольт ЭДС (б).

Проверка. Размерность: rI_0 — вольты, как и U_0 и ε, поэтому $\varepsilon U_0/(U_0 + rI_0)$ — вольты, а $\varepsilon I_0/(U_0 + rI_0)$ — амперы. Обе ветви непрерывны в точке $\varepsilon = \varepsilon_*$: слева $I = I_0$, $U = U_0$, справа $I = I_0$, $U = \varepsilon_* - I_0 r = U_0$. Предел $r \to 0$: граница $\varepsilon_* \to U_0$, элемент включён прямо на источник, $U = \varepsilon$ — верно.

Числовая проверка. $U_0 = 2$ В, $I_0 = 2$ А, $r = 0{,}5$ Ом, $\varepsilon_* = 3$ В; при $\varepsilon = 1{,}5$ В получаем $U = 1$ В, $I = 1$ А (на резисторе 0,5 В, сумма 1,5 В); при $\varepsilon = 5$ В — $I = 2$ А, $U = 4$ В (на резисторе 1 В, сумма 5 В); перебор точек пересечения на компьютере даёт те же значения. Физический смысл: при малых ε элемент работает как резистор U_0/I_0 в делителе напряжения с r, а при больших — как источник тока I_0, не зависящий от ε.

Ответ. При $\varepsilon < U_0 + rI_0$: $I = \dfrac{\varepsilon I_0}{U_0 + rI_0}$, $U_\text{Э} = \dfrac{\varepsilon U_0}{U_0 + rI_0}$. При $\varepsilon > U_0 + rI_0$: $I = I_0$, $U_\text{Э} = \varepsilon - I_0 r$.