Бревно на двух балках

Задача 6. [ИОШ 2018/19, 11 класс, задача 6] Цилиндрическое бревно массой m и радиусом R удерживают в горизонтальном положении с помощью двух одинаковых балок длиной l и вертикальной стены. Один конец каждой балки закреплён шарнирно на стене, второй — привязан к стене с помощью горизонтального троса (см. рисунок), при этом балки располагаются под углом α к стене. При каком угле α сила натяжения тросов минимальна? Найти минимальную силу натяжения тросов.

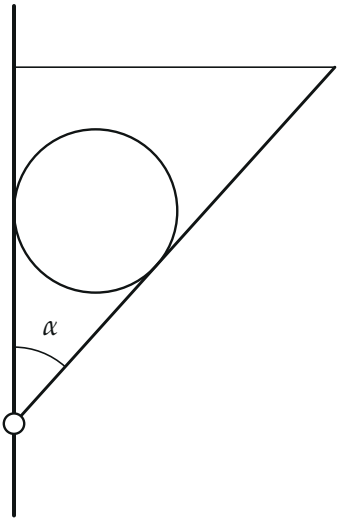


Рисунок условия (вид вдоль оси бревна): бревно лежит на балке и касается стены, балка шарнирно закреплена на стене внизу, её верхний конец привязан к стене горизонтальным тросом; α — угол между балкой и стеной. Вторая балка и второй трос расположены за первыми на том же виде.

▲ **Решение. Что происходит.** Бревно давит на балки, балки стремятся повернуться вокруг шарниров, и от поворота их удерживают тросы. Значит, натяжение троса можно найти из равновесия балки: момент силы давления бревна относительно шарнира уравновешивается моментом силы натяжения. Сначала выразим T через угол α, затем найдём минимум по α. Качественно ясно, что минимум есть: при малых α балки почти вертикальны, бревно зажато между ними и стеной, и силы давления

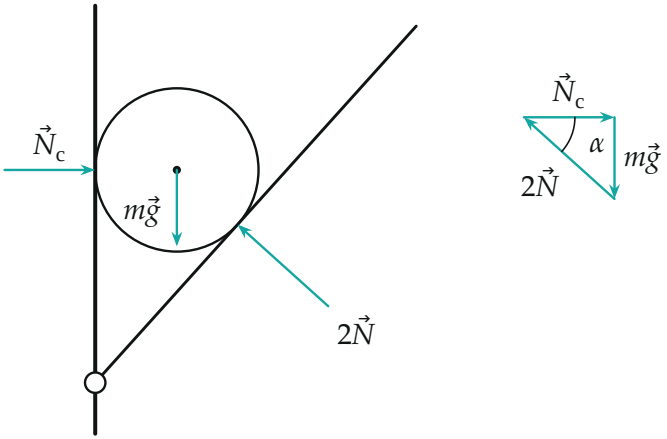
огромны; при α около 90° плечо горизонтального троса относительно шарнира стремится к нулю, и ему нужна огромная сила. Между этими крайностями натяжение меньше. Класс задачи: статика с шарниром и экстремум.

Обозначения и допущения. Балки и тросы невесомые, стена и балки гладкие (трения нет, поэтому сила со стороны балки на бревно перпендикулярна балке, а сила стены — горизонтальна). N — сила, с которой одна балка действует на бревно; N_c — сила стены на бревно; T — натяжение одного троса; x — расстояние от шарнира до точки касания бревна и балки. Рисуем вид вдоль оси бревна: обе балки на нём совпадают, поэтому силы от двух балок рисуем суммой $2\vec{N}$.

1. Равновесие бревна. Силы на бревно: тяжесть $m\vec{g}$, сила стены $\vec{N}_c$ и сила $2\vec{N}$ от двух балок. Запишем условие равновесия бревна в проекции на вертикаль; ось вертикальная потому, что она перпендикулярна неизвестной горизонтальной силе стены, и та в уравнение не войдёт. Сила балки составляет с горизонталью угол α (нормаль к балке, наклонённой к вертикали под углом α):

$$2N\sin\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{2\sin\alpha}. \tag{1}$$

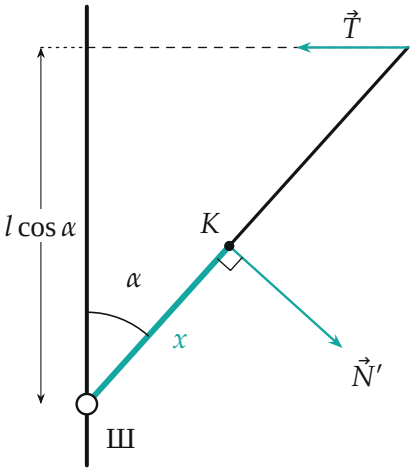
Проекция на горизонталь даёт $N_c = 2N\cos\alpha$ — она нужна только для проверки.



Силы на бревно: $m\vec{g}$ из центра, $\vec{N}_c$ от стены горизонтально и $2\vec{N}$ от балок перпендикулярно балкам. Справа те же силы, сложенные в замкнутый треугольник: $mg = 2N\sin\alpha$, $N_c = 2N\cos\alpha$.

2. Равновесие балки: моменты относительно шарнира. Силы на балку: сила N от бревна (по третьему закону Ньютона, равна по модулю силе из пункта 1 и направлена перпендикулярно балке), натяжение троса T и сила в шарнире. Выберем ось моментов в шарнире: сила в шарнире неизвестна, но её момент равен нулю. Правило моментов для балки (она в покое) даёт: момент силы N равен моменту силы T. Плечо силы N — расстояние x от шарнира до точки приложения вдоль балки (сила перпендикулярна балке). Плечо силы T — вертикальное расстояние от шарнира до линии троса (трос горизонтален): $l\cos\alpha$. Эти моменты вращают балку в противоположные стороны, поэтому

$$Nx = Tl\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Nx}{l\cos\alpha} = \frac{mg\,x}{2l\sin\alpha\cos\alpha}. \qquad (2)$$

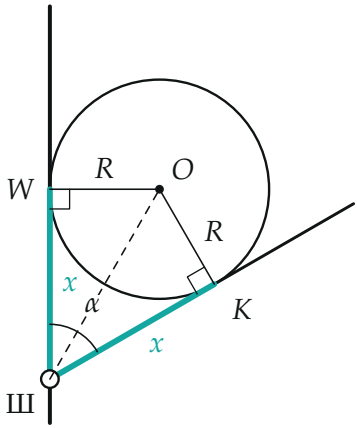


Силы на одну балку: $\vec{N}'$ от бревна на расстоянии x от шарнира Ш перпендикулярно балке, $\vec{T}$ от троса на конце и неизвестная сила в шарнире (её момент относительно Ш равен нулю). Плечо $\vec{N}'$ равно x, плечо $\vec{T}$ — $l\cos\alpha$.

3. Расстояние x из геометрии. Бревно касается и стены, и балки, поэтому его центр O лежит на биссектрисе угла α между стеной и балкой,

а расстояния от шарнира до двух точек касания равны (касательные к окружности из одной точки): ШW = ШK = x. В прямоугольном треугольнике ШWO угол при шарнире равен $\frac{\alpha}{2}$, катет OW равен R, значит

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{x} \quad \Rightarrow \quad x = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$



Геометрия касания (рисунок для $\alpha = 60°$): центр O на биссектрисе угла при шарнире, радиусы OW и OK перпендикулярны стене и балке, ШW = ШK = x, в треугольнике ШWO угол при Ш равен $\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{x}$.

4. Натяжение как функция угла. Подставим (3) в (2):

$$T = \frac{mgR}{2l\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим $u = \sin^2\frac{\alpha}{2}$. Тогда $\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2u$ и $\cos\alpha = 1 - 2u$, значит

$$T = \frac{mgR}{4l\,u\,(1-2u)}. \tag{4}$$

Здесь $0 < u < \frac{1}{2}$ ($0 < \alpha < 90°$: при $\alpha \geq 90°$ трос уже не удерживает балку).

5. Минимум. Минимуму T отвечает максимум знаменателя $f(u) = u(1-2u)$. Первый способ — выделение полного квадрата:

$$f(u) = u - 2u^2 = \frac{1}{8} - 2\Big(u - \frac{1}{4}\Big)^2 \le \frac{1}{8},$$

равенство при $u = \frac{1}{4}$, то есть $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\alpha}{2} = 30°$, $\alpha = 60°$. Второй способ — производная: $f'(u) = 1 - 4u = 0$ даёт то же $u = \frac{1}{4}$, и это максимум, так как $f'' = -4 < 0$. (В переменной $\frac{\alpha}{2}$ производная даёт $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}) = 0$, как в решении организаторов.) Подставим $f_{\max} = \frac{1}{8}$ в (4):

$$T_{\min} = \frac{mgR}{4l\cdot\frac{1}{8}} = \frac{2mgR}{l}.$$

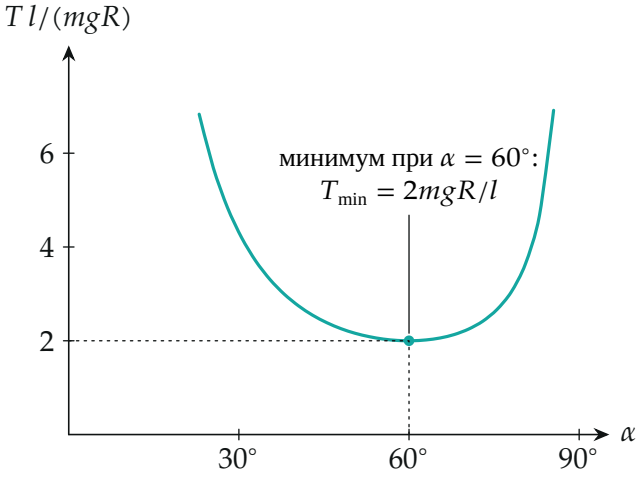


График $T(\alpha)$ по формуле (4): натяжение неограниченно растёт при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to 90°$ и минимально при $60°$.

Обратите внимание: ответ годится, только если точка касания лежит на балке, то есть $x \le l$. При $\alpha = 60°$ по (3) $x = R\operatorname{ctg}30° = \sqrt{3}\,R$, значит нужно $l \ge \sqrt{3}R \approx 1{,}7R$; при более короткой балке бревно свешивалось бы за её конец, и оптимума при $60°$ нет.

Проверка: второй способ получить T. Возьмём систему «балка и половина бревна» — на неё действуют T, сила стены $\frac{1}{2}N_c$, вес $\frac{1}{2}mg$ и сила в шарнире. Моменты относительно шарнира: вес на плече R и сила стены на высоте x над шарниром поворачивают систему в одну сторону, трос — в другую:

$$Tl\cos\alpha = \frac{mg}{2}R + \frac{mg\operatorname{ctg}\alpha}{2}x = \frac{mgx}{2}\left(\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\alpha\right) = \frac{mgx}{2\sin\alpha},$$

что совпадает с (2). Здесь использовано $R = x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ из (3) и тождество $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$. Размерность: mgR/l — сила. Пределы: при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to 90^\circ$ из (4) $T \to \infty$, как и объяснено качественно. Числовой перебор (python, $mg = 1$, $R = 1$, $l = 4$): минимум $T = 0{,}5$ при $\alpha = 60{,}0^\circ$, как $2mgR/l$. Физический смысл: чем меньше α, тем сильнее бревно давит на балку ($N \sim 1/\sin\alpha$); чем больше α, тем короче плечо троса $l\cos\alpha$. Минимум — компромисс этих двух эффектов.

Ответ. Сила натяжения тросов минимальна при $\alpha = 60^\circ$; $T_{\min} = \dfrac{2mgR}{l}$.