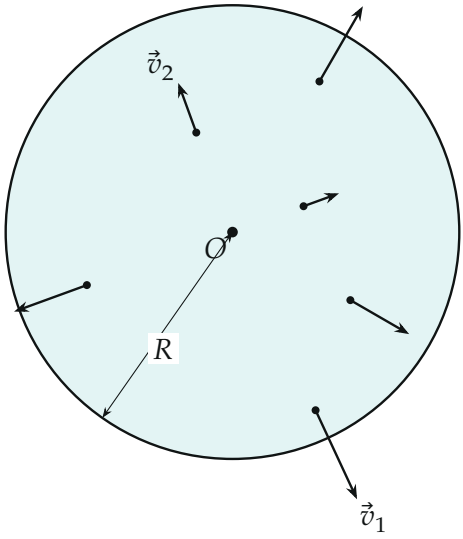
Расширяющееся облако пыли

Задача 2. [ИОШ 2018/19, 9 класс, задача 2] Инженеры-взрывотехники, изучая взрыв экспериментального субъядерного заряда, установили, что сразу после взрыва заряд превращается в шарообразное однородное облако мельчайшей пыли радиуса R и плотности ρ_0. Начальная скорость v каждой пылинки облака направлена от его центра и пропорциональна расстоянию r от неё до центра облака: $v = Hr$, где H — известный коэффициент. Считая, что в дальнейшем скорости пылинок не меняются, определите плотность пыли на расстоянии x от центра облака через время t после взрыва.



Поясняющий рисунок. Облако в начальный момент: чем дальше пылинка от центра O, тем больше её скорость ($v_1 > v_2$), и направлена она от центра.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Каждая пылинка летит прямо и равномерно от центра, а скорость пропорциональна её расстоянию до центра. Поэтому расстояния всех пылинок до центра за время t вырастают в одно и то же число раз $k = 1 + Ht$: облако просто «растягивается», как фотография при увеличении, остаётся шаром и остаётся однородным. Объём шара растёт в k^3 раз, а масса не меняется, поэтому плотность

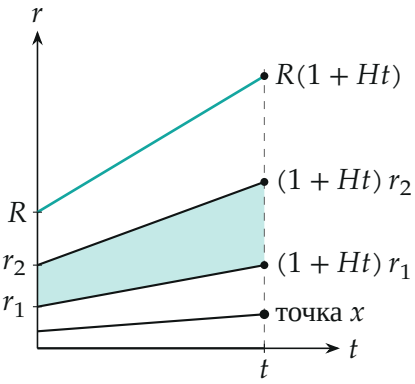
падает в k^3 раз. Главная идея — следить за одним и тем же набором пылинок: масса выделенного слоя пылинок сохраняется, и нужно только понять, где этот слой окажется через время t.

Обозначения. O — центр облака; r_0 — расстояние пылинки от O в начальный момент, r — через время t; $k = 1 + Ht$; $\rho(r, t)$ — плотность на расстоянии r от центра в момент t.

1. Закон движения пылинки. Скорость пылинки не меняется и направлена вдоль радиуса от центра, поэтому она летит по прямой от центра, и расстояние растёт равномерно:

$$r = r_0 + v\,t = r_0 + Hr_0\,t = r_0\,(1 + Ht) = k\,r_0.$$

На рисунке — графики $r(t)$ для нескольких пылинок: прямые с наклоном, пропорциональным r_0. Они не пересекаются, поэтому порядок пылинок по расстоянию от центра сохраняется: дальше от центра была — дальше от центра осталась.



Зависимость расстояния от центра от времени: прямые $r = k\,r_0$ для пылинок с $r_0 = R$ (край облака), r_2, r_1 и $R/8$. Закрашена полоса пылинок, бывших между r_1 и r_2. Справа — положения в момент t, для которого $Ht = 1$.

2. Слой пылинок и его плотность. Рассмотрим пылинки, которые в начальный момент находились между сферами радиусов r_1 и r_2. Их масса не изменится, и она равна

$$m = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3).$$

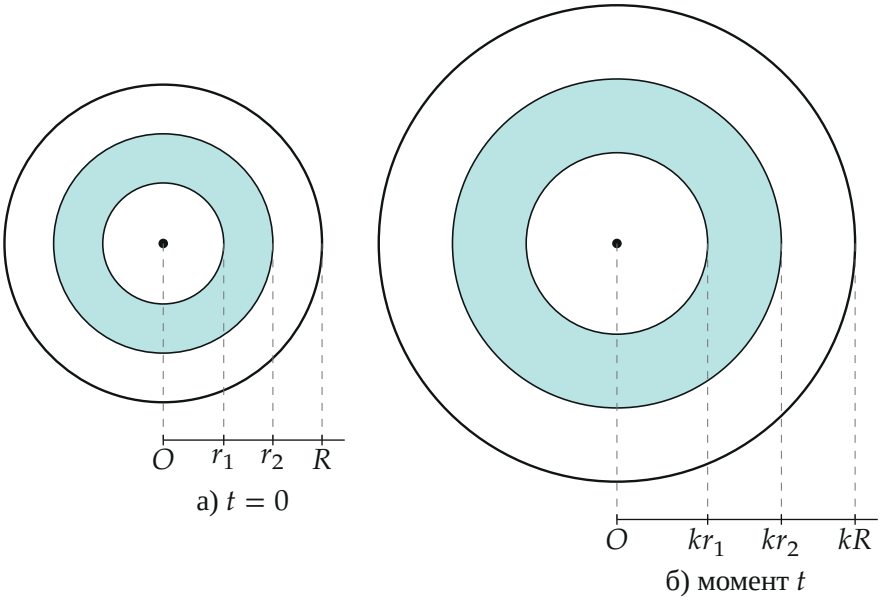
Через время t эти пылинки окажутся между сферами радиусов $k\,r_1$ и $k\,r_2$ (пункт 1). Других пылинок в этом слое нет: пылинки, бывшие дальше r_2, оказались дальше $k\,r_2$, а бывшие ближе r_1 — ближе $k\,r_1$. Объём слоя

$$V = \frac{4}{3}\pi((k\,r_2)^3 - (k\,r_1)^3) = k^3 \cdot \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3),$$

поэтому плотность в слое

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0}{k^3} = \frac{\rho_0}{(1+Ht)^3}.$$

Она не зависит от r_1 и r_2: облако остаётся однородным.



а) $t = 0$ б) момент t

Слой пылинок, бывших между r_1 и r_2, до и после разлёта: радиусы обеих его границ выросли в k раз (рисунок для $k = 1{,}5$).

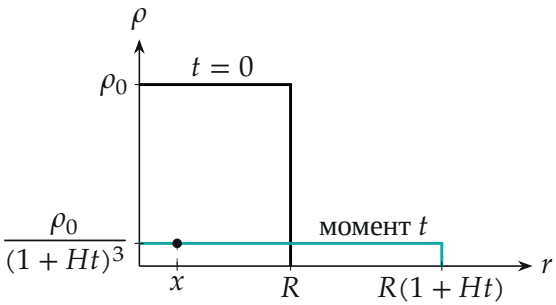
3. Граница облака и ответ. Самые далёкие пылинки имели $r_0 = R$ и теперь на расстоянии $kR = R(1 + Ht)$: это радиус облака. За его преде-

лами пыли нет. Внутри плотность одинакова везде, поэтому

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{(1+Ht)^3}, & r < R(1+Ht), \\ 0, & r > R(1+Ht). \end{cases}$$

Точка на расстоянии x лежит внутри облака, если $x < R(1+Ht)$. При $x < R$ это так в любой момент $t \geqslant 0$; при $x > R$ облако доходит до этой точки только в момент $t_x = (x-R)/(HR)$, а до него пыли там нет. Значит, плотность на расстоянии x равна

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{(1+Ht)^3}, & x < R(1+Ht), \\ 0, & x > R(1+Ht). \end{cases}$$



Плотность как функция расстояния от центра: ступенька высотой ρ_0 при $r < R$ в начальный момент и более низкая и более широкая ступенька в момент t (рисунок для $Ht = 1$).

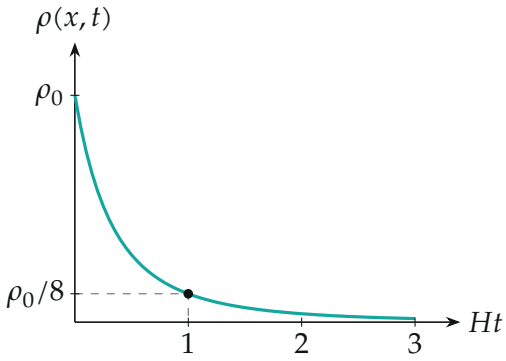
Обратите внимание: в точке x в момент t находятся не те пылинки, что были там в начале: те улетели дальше, а сюда прилетели пылинки, стартовавшие на расстоянии x/k от центра. Поэтому плотность находят по слою пылинок (их масса сохраняется), а не по одной пылинке.

Второй способ: по всему облаку. Облако однородно (пункт 2), его

масса $M = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ не меняется, а объём стал $\frac{4}{3}\pi(kR)^3$. Отсюда

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(kR)^3} = \frac{\rho_0}{k^3},$$

то же самое.



Плотность в точке $x < R$ как функция времени: в момент $t = 1/H$ (то есть $Ht = 1$) она в 8 раз меньше начальной.

Проверка. При $t = 0$ получаем ρ_0, как и должно быть. Масса сохраняется: $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi(kR)^3 = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. При $t \to \infty$ плотность убывает как $\rho_0/(Ht)^3 \to 0$: облако разлетается, и пыли в каждой точке становится всё меньше. Численный опыт тоже подтвердил формулу: для $Ht = 0{,}5$ миллионы случайных пылинок, равномерно разбросанных в шаре, дали плотность $0{,}296\,\rho_0$ в трёх разных слоях, а $1/1{,}5^3 = 0{,}2963$.

Физический смысл: при $Ht = 1$ радиус облака удвоился, объём вырос в 8 раз, плотность упала в 8 раз.

Ответ. $\rho(x,t) = \dfrac{\rho_0}{(1+Ht)^3}$ при $x < R(1+Ht)$ и $\rho = 0$ при $x > R(1+Ht)$ (облако остаётся однородным).