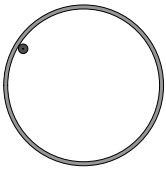
# Обруч у стены и гвоздь

**Задача 3.** [ИОШ 2018/19, 9 класс, задача 3] К стене прислонили и удерживают обруч. В одной точке в стене «внутри» обруча в стену вбили гвоздь так, что обруч касается его (см. рисунок). Найти геометрическое место точек стены, в которые нужно вбить второй гвоздь внутри обруча, чтобы обруч оставался неподвижным. Ответ обосновать (даже правильный ответ без обоснования засчитываться не будет).

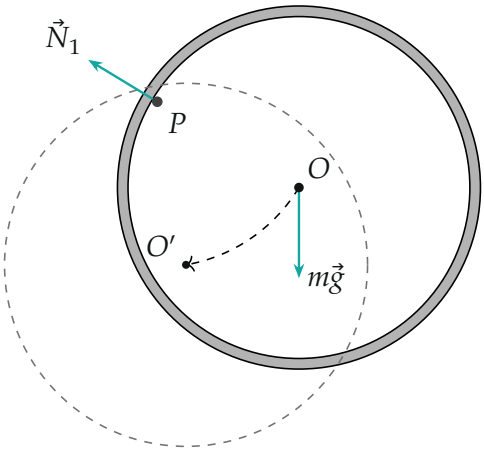


▲ **Решение. Что происходит.** Обруч прижат к стене и опирается изнутри на гвоздь $P$. Второй гвоздь $Q$ вбивают так, чтобы обруч касался и его изнутри; нужно найти все такие места $Q$, при которых обруч остаётся неподвижным. Считаем стену и гвозди гладкими (трения нет): тогда сила гвоздя направлена по нормали к обручу, то есть вдоль радиуса, и гвоздь может только толкать, тянуть он не может. Главная идея: сначала понять, как движется обруч с одним гвоздём, — это покажет, где второй гвоздь нужен; затем проверить равновесие силами. Вес и обе реакции проходят через центр обруча, и всё сводится к вопросу, можно ли уравновесить вес двумя толкающими силами.

**Обозначения.** $O$ — центр обруча (в нём приложен вес), $R$ — радиус. Положение точки обруча задаём углом от горизонтали вправо против часовой стрелки. $P$ — первый гвоздь (на рисунке условия он в верхней левой части обруча, угол $\varphi \approx 149°$), $Q$ — второй гвоздь, его угол $\psi$; $T$ — верхняя точка обруча ($90°$); $P'$ — точка, диаметрально противоположная $P$ (угол $\varphi - 180°$). $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — силы, с которыми гвозди действуют на обруч; $N_1 \geqslant 0$, $N_2 \geqslant 0$.

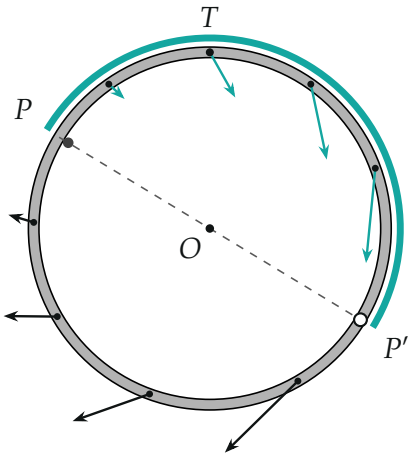
**1. Обруч с одним гвоздём.** Сила $\vec{N}_1$ направлена вдоль $OP$ от центра, вес $m\vec{g}$ — вертикально вниз из центра. Если $P \neq T$, эти силы лежат на

разных прямых и уравновеситься не могут: освобождённый обруч начинает двигаться. Гвоздь всё время касается обруча изнутри, поэтому расстояние от него до центра обруча остаётся постоянным: центр опускается по дуге окружности с центром в гвозде.




*Обруч с одним гвоздём $P$: силы $\vec{N}_1$ и $m\vec{g}$ и первые мгновения движения. Пунктиром — обруч в сдвинутом положении, стрелка — путь центра $O \to O'$.*

**2. Какие точки обруча сдвигаются внутрь.** Движение обруча складывается из поступательного движения со скоростью центра $\vec{v}_O$ (она перпендикулярна $PO$ и направлена вниз) и вращения вокруг центра. При вращении скорости точек касательны к обручу и точки внутрь и наружу не сдвигают. Значит, внутрь, к центру, смещаются те точки, где $\vec{v}_O$ направлена внутрь: это полуокружность, противоположная направлению $\vec{v}_O$. Её граница — диаметр, перпендикулярный $\vec{v}_O$, то есть диаметр $PP'$. Тот же вывод даёт вращение вокруг точки касания $P$ как мгновенного центра. Итак, при освобождении обруча внутрь смещаются точки дуги от $P$ по часовой стрелке через $T$ до $P'$, на остальной половине — наружу.




*Скорости точек обруча при освобождении (ориентир — первый гвоздь $P$). Бирюзовые стрелки — точка смещается внутрь, чёрные — наружу. Бирюзовая дуга — вся «внутренняя» часть обруча от $P$ через $T$ до $P'$.*

Второй гвоздь на «наружной» части обруча не поможет: обруч просто отойдёт от него. Значит, $Q$ лежит на дуге $PTP'$. Но это только необходимое условие.

**3. Условие равновесия.** Если $Q$ стоит между $T$ и $P$ (выше и левее первого гвоздя), обруч повернётся вокруг второго гвоздя, а первый ему уже не мешает. Разберём точно. Равновесие означает

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Все три силы проходят через $O$, поэтому их моменты относительно $O$ равны нулю автоматически, и остаётся одно векторное равенство. Выберем ось $x$ вправо, ось $y$ вверх и спроецируем силы, направленные вдоль $OP$ и $OQ$:

$$N_1 \cos\varphi + N_2 \cos\psi = 0, \qquad N_1 \sin\varphi + N_2 \sin\psi = mg.$$

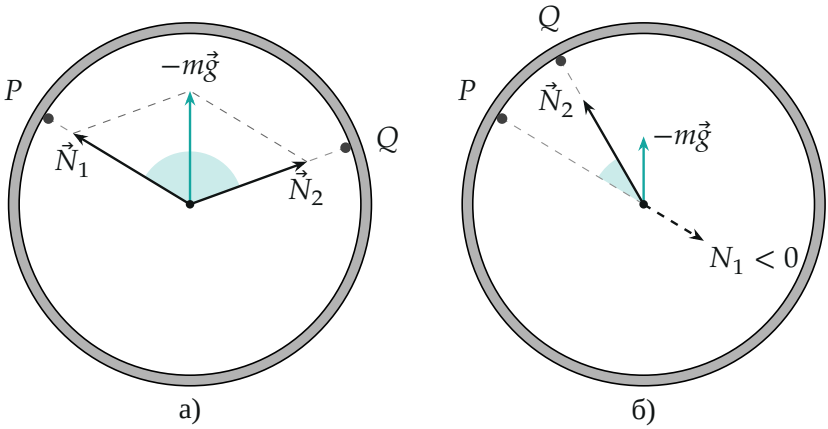
Решим систему (определитель $\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi = \sin(\psi - \varphi)$):

$$N_1 = -\frac{mg\cos\psi}{\sin(\psi-\varphi)}, \qquad N_2 = \frac{mg\cos\varphi}{\sin(\psi-\varphi)}.$$

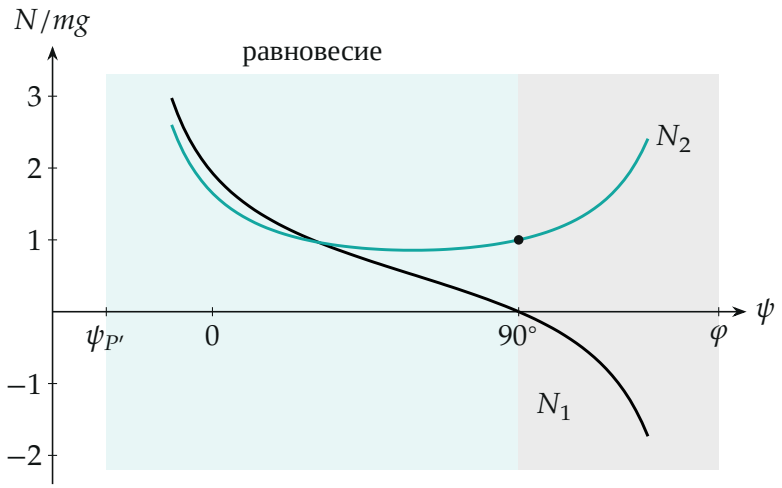
Для $P$ в верхней левой четверти $\cos\varphi < 0$. Условие $N_2 \geqslant 0$ даёт $\sin(\psi - \varphi) < 0$, то есть $\varphi - 180^\circ < \psi < \varphi$. Тогда $N_1 \geqslant 0$ означает $\cos\psi \geqslant 0$, то есть $-90^\circ \leqslant \psi \leqslant 90^\circ$. Вместе

$$\varphi - 180^\circ < \psi \leqslant 90^\circ.$$

Геометрически это значит: вектор $-m\vec{g}$ (вверх) раскладывается по лучам $OP$ и $OQ$ с неотрицательными коэффициентами, когда луч $OT$ лежит внутри угла $POQ$ (он меньше развёрнутого).

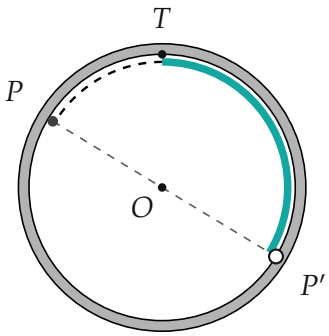



*Разложение вектора $-m\vec{g}$ по лучам $OP$ и $OQ$. а) $Q$ на дуге от $T$ вправо: $T$ внутри угла $POQ$ (закрашен), обе силы положительны ($N_1 \approx 1{,}21\,mg$, $N_2 \approx 1{,}10\,mg$ при $\psi = 20^\circ$). б) $Q$ между $T$ и $P$: $T$ вне угла, $N_1 < 0$ — первый гвоздь должен был бы тянуть, равновесия нет.*




*Силы гвоздей в зависимости от положения $Q$ (при $\varphi \approx 149°$). Равновесие — на закрашенном участке от $\psi_{P'} = \varphi - 180°$ до $90°$; при $\psi \to \psi_{P'}$ силы неограниченно растут, при $\psi = 90°$ имеем $N_1 = 0$, $N_2 = mg$.*

**4. Ответ.** Искомое место — дуга обруча от верхней точки $T$ до точки $P'$, диаметрально противоположной первому гвоздю, по часовой стрелке через правую часть обруча, то есть та дуга, которая не содержит $P$. Верхняя точка $T$ входит: обруч просто висит на втором гвозде, $N_1 = 0$. Точка $P'$ не входит: силы гвоздей на концах диаметра направлены вдоль диаметра, а вес — поперёк, уравновесить его нельзя.




*Искомое место второго гвоздя — бирюзовая дуга от $T$ до $P'$. Пунктир — дуга между $T$ и $P$, где обруч повернётся вокруг второго гвоздя; $P'$ не входит (пустой кружок). Остальные точки не подходят.*

То же правило при любом положении первого гвоздя: искомое место — дуга от $T$ до $P'$, не содержащая $P$. Если первый гвоздь в нижней половине обруча, верхний и нижний гвозди просто меняются ролями, и дуга оказывается такой же формы.

Обратите внимание: недостаточно поставить второй гвоздь в «внутренней» половине. Гвоздь на дуге между $T$ и $P$ (выше и левее $P$) тоже принадлежит ей, но обруч повернётся вокруг него: для равновесия нужно, чтобы вес был зажат между толкающими силами, а не просто чтобы гвоздь мешал одному из движений.

**Проверка.** Размерность: $N_1/mg$ и $N_2/mg$ безразмерны. Предельные случаи: при $\psi = 90^\circ$ (гвоздь в верхней точке) получаем $N_1 = 0$, $N_2 = mg$ — обруч висит на верхнем гвозде. При $\psi \to \varphi - 180^\circ$ знаменатель $\sin(\psi - \varphi) \to 0$ и силы растут неограниченно: гвозди на концах диаметра вес не удержат, поэтому $P'$ исключена. Кинематический способ (пункт 2) и силовой (пункт 3) дали одну и ту же дугу. Численно: для каждого $\psi$ с шагом $1^\circ$ проверили, есть ли допустимое смещение центра вниз, не убирающее обруч от обоих гвоздей, — равновесие нашлось ровно при $-31^\circ \leqslant \psi \leqslant 90^\circ$, как в формулах.

Физический смысл: обруч держится, когда вертикаль, проведённая вверх из центра, проходит между радиусами к двум гвоздям — вес «зажат» между двумя толкающими силами.

**Ответ.** Дуга обруча от верхней точки $T$ до точки $P'$, диаметрально противоположной первому гвоздю (дуга, не содержащая первый гвоздь): $T$ включена, $P'$ нет. При первом гвозде в верхней левой части (как на рисунке) это дуга от верхней точки по часовой стрелке до диаметра, проходящего через первый гвоздь.