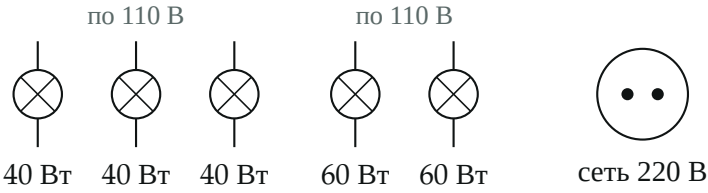
Пять лампочек в бытовой сети

Задача 4. [ИОШ 2018/19, 9 класс, задача 4] В распоряжении инженера имеются пять электрических лампочек: три — номинальной мощностью $P_1 = 40$ Вт и две — номинальной мощностью $P_2 = 60$ Вт. Все лампочки рассчитаны на напряжение $U = 110$ В. Как следует подключить эти лампочки к бытовой электрической сети напряжением $U_1 = 220$ В, чтобы все они горели нормальным накалом?



Поясняющий рисунок: пять ламп, рассчитанных на 110 В, и сеть 220 В.

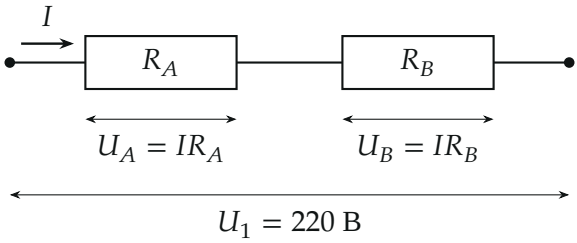
▲ **Решение. Что происходит.** Лампа горит нормальным накалом, когда на ней её номинальное напряжение $U = 110$ В, ровно половина напряжения сети. Значит, цепь из ламп должна делиться на две части, соединённые последовательно, и на каждой из них должно быть по 110 В. Это задача на делитель напряжения: последовательные участки делят напряжение пропорционально сопротивлениям, поэтому сопротивления двух частей должны быть равны.

Обозначения. r_1 и r_2 — сопротивления ламп 40 Вт и 60 Вт в рабочем режиме (нить горячая); R_A и R_B — сопротивления двух частей цепи; I — ток в сети. Сопротивление нити зависит от температуры, поэтому берём его именно в номинальном режиме: другого режима у правильно включённой лампы и не будет.

1. Почему две части и почему внутри части лампы параллельно. Пусть цепь — две части A и B, включённые в сеть последовательно (рисунок ниже). Ток через них один и тот же, а напряжение делится по закону Ома:

$$U_A = IR_A, \qquad U_B = IR_B, \qquad U_A + U_B = U_1.$$

Нужно $U_A = U_B = U_1/2 = U$, то есть $R_A = R_B$. Внутри части на каждой лампе тоже должно быть все 110 В части, поэтому лампы внутри части соединены параллельно: последовательно с другой лампой лампа получила бы только долю от 110 В.



Две части цепи последовательно: ток общий, напряжение делится пропорционально сопротивлениям. Поровну — только при $R_A = R_B$.

2. Сопротивления ламп. Мощность лампы в номинальном режиме $P = U^2/r$ (закон Джоуля — Ленца вместе с законом Ома), откуда

$$r_1 = \frac{U^2}{P_1} = \frac{110^2}{40} = 302{,}5 \text{ Ом}, \qquad r_2 = \frac{U^2}{P_2} = \frac{110^2}{60} \approx 201{,}7 \text{ Ом}.$$

Обратите внимание: лампа большей мощности имеет *меньшее* сопротивление, $r_1/r_2 = P_2/P_1 = 3/2$.

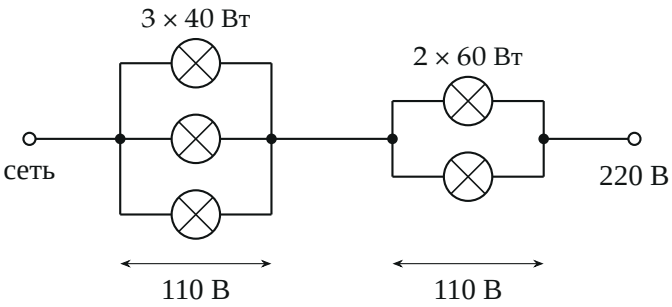
3. Как сделать две равные части. У параллельных ламп складываются проводимости $1/r = P/U^2$, то есть, при одном и том же напряжении U на всех лампах части, складываются их мощности:

$$\frac{1}{R_A} = \sum_{\text{A}} \frac{1}{r} = \frac{P_A}{U^2}, \qquad \frac{1}{R_B} = \frac{P_B}{U^2},$$

где P_A и P_B — суммарные номинальные мощности ламп частей. Условие $R_A = R_B$ превращается в $P_A = P_B$: каждая часть должна взять половину общей мощности $3 \cdot 40 + 2 \cdot 60 = 240$ Вт, то есть 120 Вт. Набрать 120 Вт из ламп по 40 и 60 Вт можно только так: три лампы по 40 Вт в одной части и две по 60 Вт в другой (перебор всех 2^5 разбиений

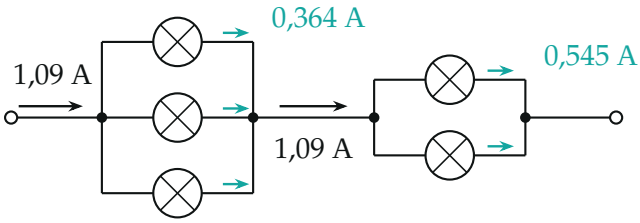
на python даёт только это разбиение). Проверим через сопротивления:

$$R_A = \frac{r_1}{3} = \frac{302{,}5}{3} \approx 100{,}8 \text{ Ом}, \qquad R_B = \frac{r_2}{2} = \frac{201{,}7}{2} \approx 100{,}8 \text{ Ом}.$$



Ответ: три лампы по 40 Вт параллельно, две по 60 Вт параллельно, эти две части последовательно в сеть 220 В.

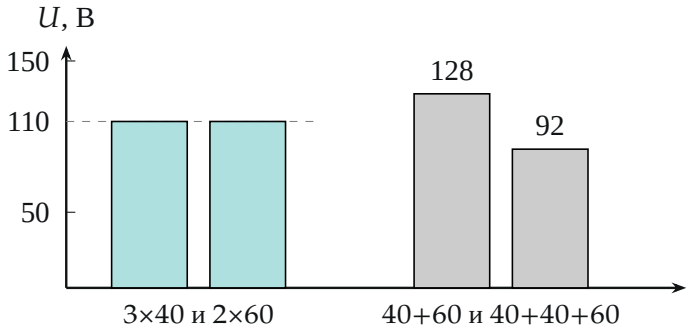
4. Проверка токами. Номинальный ток лампы $I = P/U$: у лампы 40 Вт $I_1 = 40/110 \approx 0{,}364$ А, у лампы 60 Вт $I_2 = 60/110 \approx 0{,}545$ А. Через первую часть идёт $3I_1 \approx 1{,}09$ А, через вторую $2I_2 \approx 1{,}09$ А — одинаково, как и должно быть у последовательных частей (по закону сохранения заряда в узле между частями ток не накапливается). Значит, при этом токе на каждой лампе ровно её номинальное напряжение.



Токи в рабочем режиме: три по 0,364 А сливаются в 1,09 А и расходятся на два по 0,545 А.

5. Что было бы при другом разбиении. Возьмём, например, части «40 + 60 Вт» и «40 + 40 + 60 Вт» (мощности 100 и 140 Вт). Сопротивления частей обратно пропорциональны мощностям, напряжение делится

как $140 : 100$: на первой части $220 \cdot \frac{140}{240} \approx 128$ В, на второй ≈ 92 В. Лампы первой части перекалены и быстро перегорят, лампы второй горят тускло.



Напряжения на двух частях. Слева — найденная схема (по 110 В), справа — неравные части: перекал и недокал.

Проверка. Мощность, которую берёт цепь из сети, $U_1 I = 220 \cdot 1{,}09 = 240$ Вт — ровно сумма номинальных мощностей всех ламп, как и должно быть, когда все горят нормально. Второй способ (через сопротивления, пункт 3) и способ через токи (пункт 4) дают одно и то же: обе части по 100,8 Ом.

Смысл: последовательные части делят 220 В поровну, только если их сопротивления равны, а у параллельных ламп при одном напряжении это равенство суммарных мощностей.

Ответ. Три лампы по 40 Вт соединить параллельно, две лампы по 60 Вт соединить параллельно и эти две группы включить в сеть 220 В последовательно: сопротивления групп одинаковы ($\approx 100{,}8$ Ом), и на каждой лампе будет 110 В.