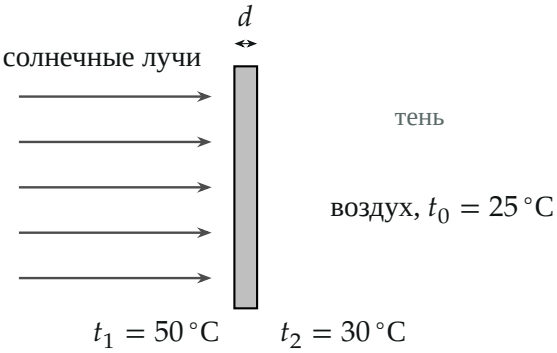
Пластинка на солнце

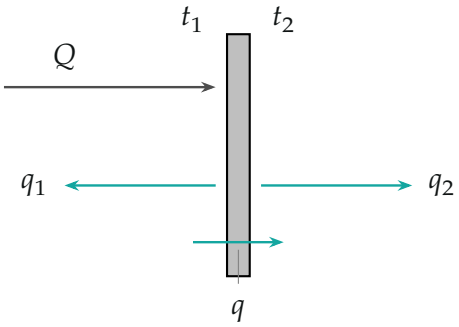
Задача 5. [ИОШ 2018/19, 9 класс, задача 5] Имеется плоская металлическая пластинка. Если пластинку расположить перпендикулярно солнечным лучам, то её освещённая сторона будет иметь температуру $t_1 = 50\,^\circ\text{C}$, а противоположная сторона — температуру $t_2 = 30\,^\circ\text{C}$. Какими будут температуры освещённой и теневой сторон, если взять пластину удвоенной толщины? Считать, что пластинка очень тонкая и отдаёт энергию окружающей среде благодаря теплопроводности. Температура окружающей среды — $t_0 = 25\,^\circ\text{C}$. Указание. В установившемся режиме поток тепла между телами пропорционален разности их температур и площади контакта, и обратно пропорционален расстоянию между ними (закон теплопроводности Фурье).



Поясняющий рисунок: пластинка толщины d поперёк солнечных лучей, вокруг воздух при t_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на стационарный тепловой баланс. Пластинка поглощает энергию Солнца освещённой стороной и отдаёт её воздуху с обеих сторон. Чтобы тепло ушло с теневой стороны, оно сначала должно пройти сквозь пластинку, и для этого нужна разность температур сторон. Удвоим толщину — пластинка хуже проводит тепло насквозь, теневая сторона остынет, освещённая нагреется. Ещё одно: сколько энергии пластинка получает, столько и отдаёт, а получает она столько же, сколько и раньше. Поэтому сумма превышений температур сторон над t_0 не изменится.

Обозначения. S — площадь пластинки, Q — энергия, поглощаемая в единицу времени (зависит только от площади и освещения, не от толщины). Поток тепла от стороны в воздух по закону Фурье пропорционален площади и разности температур стороны и воздуха; коэффициент обозначим κ (он одинаков для обеих сторон и от толщины не зависит). Поток через саму пластинку: $\dfrac{\lambda S}{d}(t_1 - t_2)$, λ — теплопроводность металла. Сторону пластинки считаем имеющей одну температуру по всей площади (пластинка тонкая, потоками через края пренебрегаем).



Потоки тепла (в единицу времени): Q — от Солнца, q_1 и q_2 — в воздух с освещённой и теневой стороны, q — сквозь пластинку. В установившемся режиме $Q = q_1 + q_2$ и $q = q_2$.

1. Баланс для всей пластинки. В установившемся режиме температура пластинки не меняется, поэтому по закону сохранения энергии вся поглощённая энергия уходит в воздух с двух сторон:

$$Q = q_1 + q_2 = \kappa S\,(t_1 - t_0) + \kappa S\,(t_2 - t_0).$$

2. Баланс для теневой стороны. Тонкий слой у теневой стороны тоже не нагревается и не остывает: сколько тепла приходит к нему сквозь пластинку, столько он отдаёт воздуху. Закон Фурье для пластинки и для воздуха:

$$q = q_2: \qquad \frac{\lambda S}{d}\,(t_1 - t_2) = \kappa S\,(t_2 - t_0).$$

Отсюда безразмерное отношение $a = \dfrac{\lambda}{\kappa d}$ — насколько легче тепло проходит сквозь пластинку, чем уходит в воздух:

$$a = \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_2} = \frac{30 - 25}{50 - 30} = \frac{1}{4}.$$

3. Пластина удвоенной толщины. Новые температуры сторон t_1' и t_2'. Солнце даёт то же Q, коэффициент κ тот же, а толщина $2d$, поэтому вместо a стоит $a/2 = 1/8$. Уравнения пунктов 1 и 2:

$$\kappa S\,(t_1' - t_0) + \kappa S\,(t_2' - t_0) = Q, \qquad t_2' - t_0 = \frac{a}{2}\,(t_1' - t_2').$$

Сравним первое с уравнением пункта 1: Q и κS сокращаются, и сумма превышений температур над t_0 сохраняется:

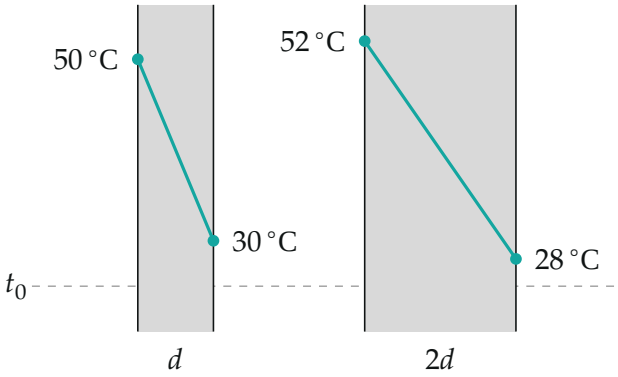
$$(t_1' - t_0) + (t_2' - t_0) = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_0) = 25 + 5 = 30\ \text{K}.$$

Обозначим $x = t_2' - t_0$, тогда $t_1' - t_0 = 30 - x$ и $t_1' - t_2' = 30 - 2x$. Из второго уравнения

$$x = \frac{1}{8}\,(30 - 2x) \quad \Rightarrow \quad 8x = 30 - 2x \quad \Rightarrow \quad x = 3\ \text{K},$$

$$t_2' = t_0 + x = 28\,^\circ\text{C}, \qquad t_1' = t_0 + 30 - x = 52\,^\circ\text{C}.$$

Теневая сторона остыла на 2 градуса, освещённая на столько же нагрелась.

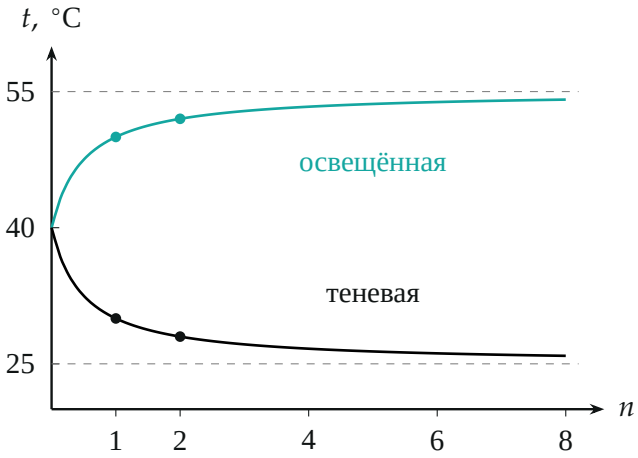


Температура внутри пластинки (бирюзовая линия) для толщин d и $2d$; слева — освещённая сторона. Перепад в толстой пластинке больше (24 против 20 градусов), а сумма превышений над t_0 та же: $25 + 5 = 27 + 3$.

Как ответ зависит от толщины. Для пластинки в n раз толще d вместо a стоит $a/n = \dfrac{1}{4n}$, и те же два уравнения дают

$$t_2^{(n)} = t_0 + \frac{30 \cdot a/n}{1 + 2a/n} = 25 + \frac{30}{4n+2}, \qquad t_1^{(n)} = 55 - \frac{30}{4n+2}.$$

При $n = 1$ это 50 и 30 °C, при $n = 2$ — 52 и 28 °C.



Температуры сторон в зависимости от толщины $n\,d$ (по формулам выше). Точки — $n = 1$ (условие) и $n = 2$ (ответ). Тонкая пластинка ($n \to 0$) прогрета

насквозь до $40\,^\circ C$, очень толстая отдаёт всё тепло с освещённой стороны ($55\,^\circ C$) и тень остаётся при t_0.

Обратите внимание: удвоение толщины не удваивает разность температур сторон (20 → 24 градуса), потому что вместе с ней уменьшается и сам поток сквозь пластинку (q_2 упал с $5\kappa S$ до $3\kappa S$).

Проверка. Подставим ответ в уравнения: сумма $27 + 3 = 30$ K — поглощённая энергия та же; поток сквозь толстую пластинку $\dfrac{\lambda S}{2d} \cdot 24 = \kappa S \cdot \dfrac{24}{8} = 3\kappa S = \kappa S\,(t_2' - t_0)$ — сходится. Пределы: при $n \to 0$ (проводит идеально) $t_1 = t_2 = 40\,^\circ\text{C}$ — две стороны одинаково отдают по половине Q; при $n \to \infty$ тепло сквозь не проходит, $t_2 \to t_0$, а $t_1 \to 55\,^\circ\text{C}$.

Смысл: толщина не меняет, сколько тепла пластинка отдаёт, а меняет только, какая сторона отдаёт больше.

Ответ. Освещённая сторона $t_1' = 52\,^\circ\text{C}$, теневая $t_2' = 28\,^\circ\text{C}$.