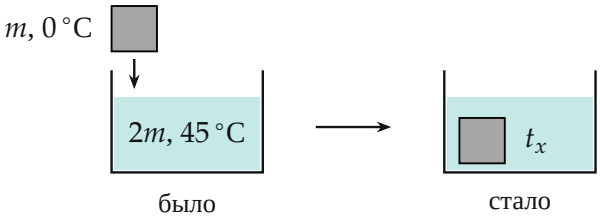
Теплоёмкость, зависящая от температуры

Задача 6. [ИОШ 2018/19, 9 класс, задача 6] Работая в секретной военной лаборатории, Чебурашка и крокодил Гена синтезировали необычный материал. Его удельная теплоёмкость c зависит от температуры t в шкале Цельсия по закону: $c(t) = c_0\,(1 + \gamma t)$, где $c_0 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град) и $\gamma = 0{,}05$ град$^{-1}$ — известные постоянные. Образец данного материала массой $m = 0{,}5$ кг и начальной температурой $t_0 = 0\,^\circ$C бросают в воду массой $2m$ и температурой $t_1 = 45\,^\circ$C. Какая установится температура? Удельная теплоёмкость воды $c = 2c_0 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), потерями тепла пренебречь.



Поясняющий рисунок: образец (серый) при $0\,^\circ$C опускают в воду при $45\,^\circ$C; в конце у обоих общая температура t_x.

▲ **Решение. Что происходит.** Обычная задача на уравнение теплового баланса: вода остывает от $45\,^\circ$C до t_x и отдаёт теплоту, материал нагревается от 0 до t_x и её получает. Необычно одно: теплоёмкость материала растёт с температурой, поэтому формула $Q = mc\,\Delta t$ для него не годится целиком. Главная идея — разбить нагрев на малые шаги Δt, на каждом из которых c почти постоянна, и сложить теплоты шагов. Сумма окажется площадью под графиком $c(t)$.

Обозначения. t_x — установившаяся температура; $Q_\text{в}$ — теплота, отданная водой; $Q_\text{м}$ — теплота, полученная материалом. Теплоёмкость воды постоянна.

Качественная картина. Если бы теплоёмкость материала была постоянной и равной c_0, баланс $2m \cdot 2c_0(45 - t_x) = mc_0 t_x$ дал бы $t_x = 36\,^\circ$C.

Но при нагреве теплоёмкость материала растёт (к 30 °C она уже в 2,5 раза больше c_0), он «забирает» больше теплоты, поэтому ответ будет ниже 36 °C.

1. Теплота, отданная водой. У воды теплоёмкость постоянная:

$$Q_в = 2m\,c\,(t_1 - t_x) = 2m \cdot 2c_0\,(t_1 - t_x) = 4mc_0\,(t_1 - t_x).$$

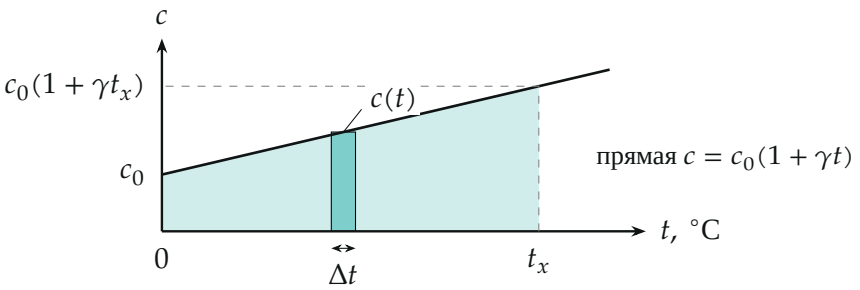
2. Теплота, полученная материалом. Рассмотрим малый шаг нагрева от t до $t + \Delta t$. На нём удельная теплоёмкость почти не меняется и равна $c(t)$, поэтому материал получает

$$\Delta Q_м = m\,c(t)\,\Delta t.$$

Это площадь узкой полоски под графиком $c(t)$ шириной Δt, умноженная на m. Сложим полоски от начала нагрева ($t_0 = 0$) до конца (t_x): сумма равна площади под графиком $c(t)$ на этом отрезке. График — прямая, фигура под ним — трапеция с основаниями $c(0) = c_0$ и $c(t_x) = c_0(1 + \gamma t_x)$ и высотой t_x:

$$Q_м = m \cdot \frac{c_0 + c_0(1 + \gamma t_x)}{2} \cdot t_x = mc_0\left(t_x + \frac{\gamma t_x^2}{2}\right).$$

Тот же результат: трапеция — это прямоугольник $c_0 t_x$ плюс треугольник $\frac{1}{2} \cdot t_x \cdot c_0 \gamma t_x$ (так считают и работу силы упругости).



Удельная теплоёмкость материала. Узкая полоска — теплота одного малого шага на 1 кг; вся закрашенная трапеция от 0 до t_x — теплота нагрева 1 кг материала.

3. Уравнение теплового баланса. Потерь нет, поэтому по закону сохранения энергии $Q_в = Q_м$:

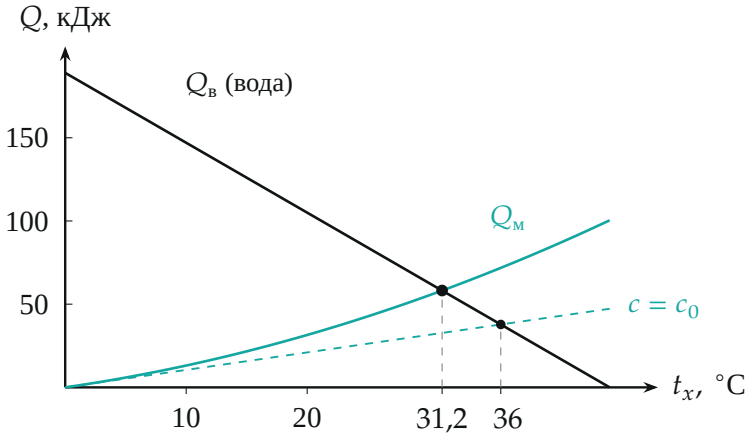
$$4mc_0\,(t_1 - t_x) = mc_0\left(t_x + \frac{\gamma t_x^2}{2}\right).$$

Масса и c_0 сокращаются: ответ от них не зависит. В общем виде $\frac{\gamma}{2}t_x^2 + 5t_x - 4t_1 = 0$ и $t_x = \dfrac{\sqrt{25 + 8\gamma t_1} - 5}{\gamma}$. Подставим $t_1 = 45$, $\gamma = 0{,}05$:

$$180 - 4t_x = t_x + 0{,}025\,t_x^2 \quad \Rightarrow \quad t_x^2 + 200\,t_x - 7200 = 0,$$

$$t_x = -100 + \sqrt{100^2 + 7200} = -100 + \sqrt{17200} \approx 31{,}2\,^\circ\text{C}.$$

Второй корень отрицательный ($\approx -231\,^\circ$C) и не подходит: температура должна лежать между 0 и 45 °C.



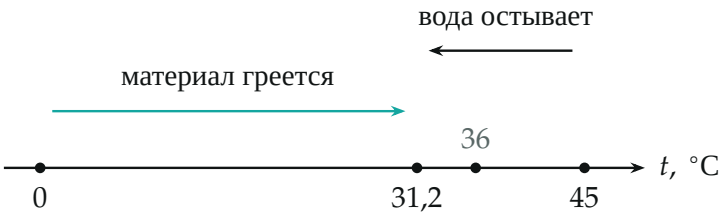
Теплота, отданная водой (чёрная прямая), и теплота, полученная материалом (бирюзовая кривая), как функции конечной температуры; пересечение — ответ 31,2 °C. Пунктир — материал с постоянной теплоёмкостью c_0, пересечение при 36 °C.

4. Второй способ: средняя теплоёмкость. Теплоёмкость линейна по температуре, поэтому теплота нагрева равна теплоте при средней теп-

лоёмкости $\bar{c} = c_0\left(1 + \frac{\gamma t_x}{2}\right)$ (средняя линия трапеции). Проверим найденное: при $t_x = 31{,}15$ средняя теплоёмкость $\bar{c} = c_0 \cdot 1{,}779$, и

$$Q_{\text{м}} = 0{,}5 \cdot 2100 \cdot 1{,}779 \cdot 31{,}15 \approx 58{,}2 \text{ кДж},$$
$$Q_{\text{в}} = 1 \cdot 4200 \cdot (45 - 31{,}15) \approx 58{,}2 \text{ кДж}.$$

Теплоты равны. Сложение тех же полосок на python (100 000 шагов) с подбором t_x делением отрезка пополам даёт 31,149 °C.



Ось температур: материал нагревается от 0 до t_x, вода остывает от 45 °C до t_x. Серая точка 36 °C — ответ при постоянной теплоёмкости материала.

Обратите внимание: в формулу $c(t)$ входит температура по шкале Цельсия, поэтому и пределы суммирования — от 0 до t_x в градусах Цельсия, а не в кельвинах.

Проверка. Размерность: γt_x безразмерно, $mc_0 t_x$ — джоули. Предел: при $\gamma \to 0$ уравнение даёт $4(45 - t_x) = t_x$, $t_x = 36$ °C — обычный ответ для постоянной теплоёмкости; с ростом γ ответ уменьшается, как и ожидалось в качественной картине. Подстановка: обе теплоты по 58,2 кДж.

Смысл: если теплоёмкость меняется, теплота — это площадь под графиком $c(t)$, а не произведение $c\,\Delta t$.

Ответ. $t_x = \dfrac{\sqrt{25 + 8\gamma t_1} - 5}{\gamma} = -100 + \sqrt{17200} \approx 31{,}2$ °C.