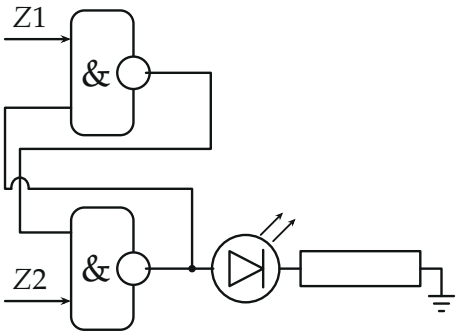
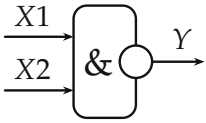
Два элемента 2И-НЕ и светодиод

Задача 1. [ИОШ 2019/20, 11 класс, задача 1] На входы логического элемента 2И-НЕ (правый рисунок) могут быть поданы либо напряжение питания — несколько вольт (логическая единица: $X_1, X_2 = 1$), или нулевое напряжение (логический нуль: $X_1, X_2 = 0$). Напряжение на выходе ($Y = 1$ либо $Y = 0$ — в зависимости от X_1, X_2) определяется таблицей. Светодиод загорается, если он подключен так, как показано на рисунке внизу справа. Два логических устройства 2И-НЕ включают в электрическую цепь (левый рисунок). Составить таблицу включений светодиода в зависимости от $Z1$ и $Z2$. Что будет со светодиодом, если при подаче на вход напряжений $Z1 = 1$ и $Z2 = 1$ кратковременно подать на вход $Z1$ напряжение $Z1 = 0$? На вход $Z2$ кратковременно подать напряжение $Z2 = 0$?





X1	X2	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

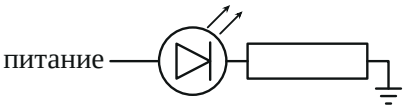


Рисунок из условия: слева — цепь из двух элементов 2И-НЕ и светодиода с резистором; справа — элемент 2И-НЕ с таблицей истинности и способ включения светодиода, при котором он загорается.

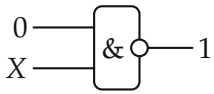
▲ **Решение. Что происходит.** Выход каждого элемента подан на вход другого, поэтому схема замкнута в кольцо: так устроен триггер — устройство с памятью. При $Z1 = 0$ или $Z2 = 0$ состояние выходов

определено однозначно, а при $Z1 = Z2 = 1$ возможны два устойчивых состояния, и выбор между ними определяет предыстория. Класс задачи — перебор состояний логической схемы с обратной связью: для каждой комбинации входов проверяем, какие значения выходов согласуются с таблицей истинности. Главная идея — два свойства элемента 2И-НЕ: нуль на любом входе даёт на выходе единицу, а единица на одном входе превращает его в инвертор второго входа.

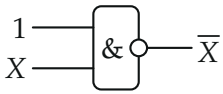
Обозначения. Y_1 — выход верхнего элемента, Y_2 — выход нижнего элемента (к нему подключён светодиод). Входы верхнего элемента — $Z1$ и Y_2, входы нижнего — Y_1 и $Z2$ (так соединены провода на рисунке). Светодиод горит при $Y_2 = 1$: на нём напряжение питания, через резистор идёт ток; при $Y_2 = 0$ напряжения на нём нет.

1. Как работает один элемент. По таблице $Y = 0$ только при $X_1 = X_2 = 1$. Отсюда два правила:

- если на одном из входов 0, то $Y = 1$ при любом втором входе;
- если на одном из входов 1, то Y равен инверсии второго входа: $X = 0 \Rightarrow Y = 1$, $X = 1 \Rightarrow Y = 0$.



на входе 0:
выход 1 при любом X



на входе 1:
выход инвертирует X

Два свойства элемента 2И-НЕ, которыми пользуемся дальше.

2. Уравнения схемы. Запишем, что делает каждый элемент (чёрта сверху — отрицание, точка — «И»):

$$Y_1 = \overline{Z1 \cdot Y_2}, \qquad Y_2 = \overline{Y_1 \cdot Z2}.$$

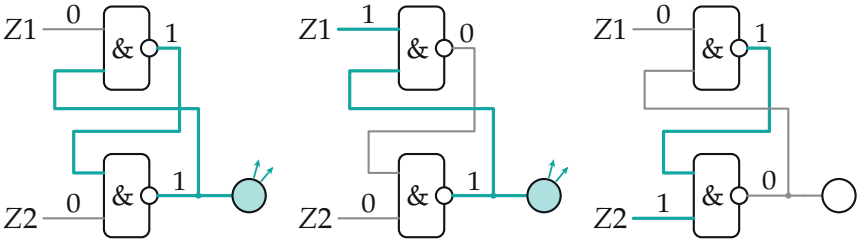
Решаем по очереди: для каждой комбинации $(Z1, Z2)$ ищем пары (Y_1, Y_2), при которых выполняются оба равенства. Светодиод горит, если $Y_2 = 1$.

3. Случаи 1–3: состояние определено однозначно. Используем правило «нуль на входе даёт единицу».

Случай 1: $Z1 = 0$, $Z2 = 0$. Нуль на входе верхнего элемента даёт $Y_1 = 1$, нуль на входе нижнего даёт $Y_2 = 1$. Равенства выполнены, светодиод горит.

Случай 2: $Z1 = 1$, $Z2 = 0$. Нуль на входе нижнего элемента даёт $Y_2 = 1$, светодиод горит. Верхний элемент получает 1 и $Y_2 = 1$, поэтому $Y_1 = 0$; нижний получает $Y_1 = 0$ и $Z2 = 0$ и снова даёт 1: согласовано.

Случай 3: $Z1 = 0$, $Z2 = 1$. Нуль на входе верхнего элемента даёт $Y_1 = 1$. Нижний получает $Y_1 = 1$ и $Z2 = 1$, на его выходе $Y_2 = 0$, светодиод не горит. Верхний элемент по-прежнему получает нуль, $Y_1 = 1$: согласовано.

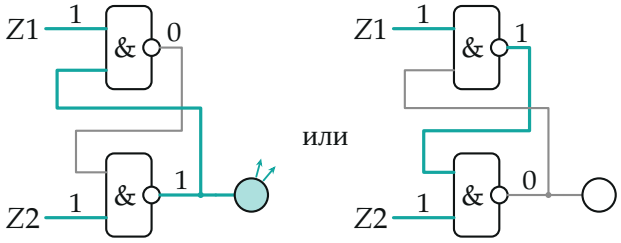


Случаи 1–3: уровни во всех точках схемы. Бирюзовый провод — логическая единица, серый — нуль; светодиод залит, когда горит.

4. Случай 4: $Z1 = 1$, $Z2 = 1$. Теперь оба элемента — инверторы: единица на входе превращает элемент в инвертор второго входа. Уравнения принимают вид

$$Y_1 = \overline{Y_2}, \qquad Y_2 = \overline{Y_1}.$$

Подходят две пары: $(Y_1, Y_2) = (0, 1)$ — светодиод горит, и $(1, 0)$ — не горит. Пары $(0, 0)$ и $(1, 1)$ не годятся: при $Y_1 = Y_2$ первое равенство нарушено. Схема устойчива в обоих состояниях, то есть «помнит», каким оно было.



горит (Y_1=0, Y_2=1) не горит (Y_1=1, Y_2=0)

Случай 4: для одних и тех же входов $Z1 = Z2 = 1$ схема может быть в любом из двух состояний.

Какое именно состояние осуществится, определяет предыстория: схема остаётся в том состоянии, в котором была перед подачей $Z1 = Z2 = 1$. Если до этого был случай 2 ($Z1 = 1$, $Z2 = 0$), светодиод горел и продолжает гореть; если случай 3 ($Z1 = 0$, $Z2 = 1$), не горел и не загорится.

5. Таблица включений светодиода.

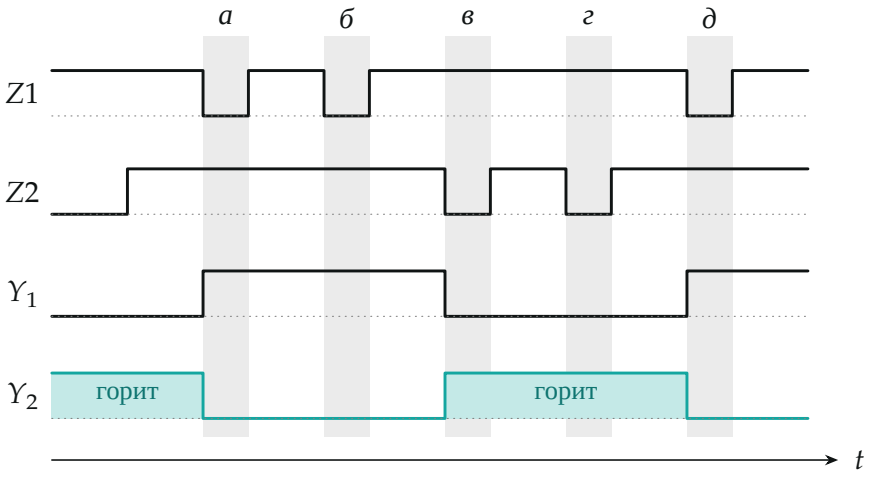
$Z1$	$Z2$	светодиод
0	0	горит
1	0	горит
0	1	не горит
1	1	горит или не горит (по предыстории)

6. Кратковременные импульсы при $Z1 = Z2 = 1$. «Кратковременно» значит: достаточно долго, чтобы сигнал успел пройти оба элемента (больше их времени задержки), но недолго, чтобы после него снова установились $Z1 = Z2 = 1$. Разберём, что происходит во время импульса и после него.

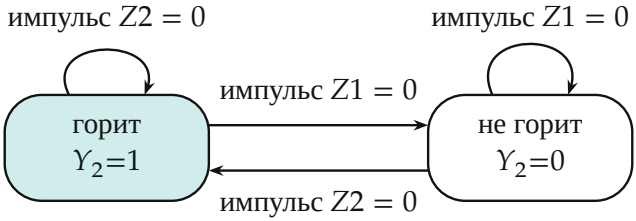
Импульс $Z1 = 0$. Во время импульса схема находится в случае 3: $Y_1 = 1$, $Y_2 = 0$, светодиод не горит — независимо от того, горел он до этого или нет. После возврата $Z1 = 1$ верхний элемент получает 1 и $Y_2 = 0$, его выход остаётся $Y_1 = 1$; нижний получает $Y_1 = 1$ и $Z2 = 1$ и держит $Y_2 = 0$. Схема осталась в состоянии «не горит». Значит, импульс $Z1 = 0$ гасит светодиод, а если он не горел — ничего не меняет.

Импульс $Z2 = 0$. Во время импульса схема находится в случае 2: $Y_2 = 1$, $Y_1 = 0$, светодиод горит. После возврата $Z2 = 1$ нижний эле-

мент получает $Y_1 = 0$ и выход остаётся $Y_2 = 1$; верхний получает 1 и $Y_2 = 1$, поэтому $Y_1 = 0$. Схема осталась в состоянии «горит». Значит, импульс $Z2 = 0$ зажигает светодиод, а если он уже горел — ничего не меняет.



Работа триггера во времени (уровень выше пунктира — единица). Серые полосы — кратковременные нули на входах: (а) $Z1 = 0$ при горящем светодиоде — гаснет; (б) $Z1 = 0$ при погашенном — остаётся погашенным; (в) $Z2 = 0$ при погашенном — загорается; (г) $Z2 = 0$ при горящем — остаётся гореть; (д) $Z1 = 0$ — снова гаснет. Между импульсами $Z1 = Z2 = 1$.



Переходы между состояниями при $Z1 = Z2 = 1$: импульс нуля на $Z1$ всегда ведёт в состояние «не горит», на $Z2$ — в «горит». Без импульсов ($Z1 = Z2 = 1$) состояние не меняется.

7. Итог по импульсам. Состояние светодиода после импульса, в зависимости от того, горел ли он до него (при $Z1 = Z2 = 1$):

	импульс $Z1 = 0$	импульс $Z2 = 0$
горел	гаснет	горит
не горел	не горит	загорается

Обратите внимание: если $Z1$ и $Z2$ одновременно переходят из 0 в 1 (из случая 1 в случай 4), обе единицы оказываются на выходах в момент переключения, и состояние зависит от того, какой из элементов окажется быстрее — в задаче такого перехода нет. Импульс нуля на входе должен быть длиннее времени задержки элементов, иначе схема не успеет перейти в новое состояние.

Проверка. Перебор всех шестнадцати наборов $(Z1, Z2, Y_1, Y_2)$ по уравнениям $Y_1 = \overline{Z1 \cdot Y_2}$, $Y_2 = \overline{Y_1 \cdot Z2}$ программой даёт ровно те же устойчивые состояния: по одному для $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ и два для $(1,1)$. Моделирование импульсов (переключение элементов по одному) даёт те же результаты, что в таблице из шага 7.

Физический смысл. Два инвертора, замкнутые в кольцо, образуют ячейку памяти на один бит: нуль на $Z2$ записывает в неё «горит», нуль на $Z1$ — «не горит», единицы на обоих входах хранят записанное.

Ответ. Таблица включений: $Z1 = 0, Z2 = 0$ — горит; $Z1 = 1, Z2 = 0$ — горит; $Z1 = 0, Z2 = 1$ — не горит; $Z1 = 1, Z2 = 1$ — горит или не горит в зависимости от предыстории. При $Z1 = Z2 = 1$ кратковременный нуль на $Z1$ гасит светодиод (или оставляет погашенным), кратковременный нуль на $Z2$ зажигает его (или оставляет горящим).