Шесть зубчатых колёс на рычаге

Задача 2. [ИОШ 2019/20, 11 класс, задача 2] Шесть одинаковых зацепляющихся зубчатых колёс связаны рычагом, вращающимся с угловой скоростью ω относительно центра колеса 1, которое является неподвижным. Найти угловую скорость шестого колеса.

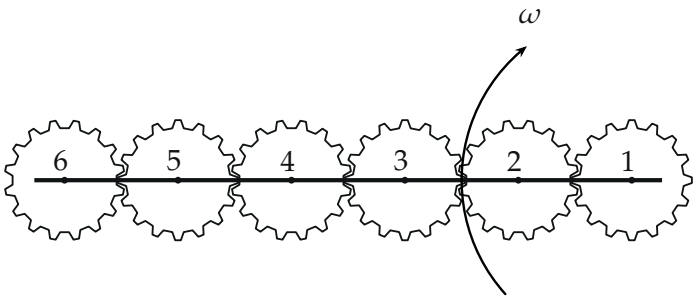


Рисунок из условия: рычаг, на котором закреплены оси колёс 1–6, вращается вокруг центра колеса 1 с угловой скоростью ω.

▲ **Решение. Что происходит.** Колесо 1 не вращается, а рычаг поворачивается вокруг его центра и тянет за собой центры остальных колёс. Каждое колесо зацеплено с соседом, поэтому колёса обкатывают друг друга. В неподвижной системе отсчёта трудно: центры колёс едут по окружностям разных радиусов. Класс задачи — кинематика твёрдого тела, а главная идея — перейти во вращающуюся вместе с рычагом систему отсчёта. В ней оси колёс неподвижны, колёса просто крутятся на месте, а зацепление без проскальзывания связывает их вращения друг с другом. Затем вернёмся обратно, сложив угловые скорости.

Обозначения. Положительное направление вращения — по часовой стрелке, как у рычага. ω — угловая скорость рычага; Ω_k — угловая скорость колеса k в неподвижной системе; ω'_k — его угловая скорость в системе отсчёта рычага; r — радиус колёс (одинаковый), центр колеса k находится на расстоянии $2(k-1)r$ от оси рычага.

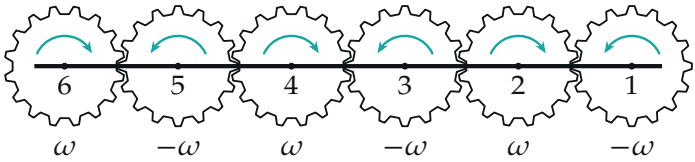
1. Зачем нужна система отсчёта рычага. В ней неподвижны центры всех колёс, поэтому скорость любой точки колеса равна только скорости

вращения вокруг его центра: $v = \omega'_k r$ для точки обода. Условие зацепления — отсутствие проскальзывания — запишется просто: у двух соседних колёс на ободе в точке касания одинаковые линейные скорости.

2. Колёса в системе рычага. Колесо 1 в неподвижной системе не вращается. Система рычага вращается с ω, значит, колесо 1 в ней вращается с той же по модулю угловой скоростью в обратную сторону: $\omega'_1 = -\omega$ (против часовой стрелки). Колесо 2 зацеплено с колесом 1: линейные скорости ободов в точке касания равны, радиусы одинаковы, поэтому модули угловых скоростей равны: $|\omega'_2| = |\omega'_1| = \omega$. Зацепленные колёса вращаются в противоположные стороны: если колесо 1 крутится против часовой стрелки, его обод в точке касания идёт вниз, и обод колеса 2 в этой точке должен идти вниз, то есть колесо 2 крутится по часовой стрелке. Значит, $\omega'_2 = +\omega$. Дальше то же самое для каждой пары соседей:

$$\omega'_k = (-1)^k \omega.$$

Нечётные колёса вращаются против часовой стрелки, чётные — по часовой, все с угловой скоростью ω по модулю.

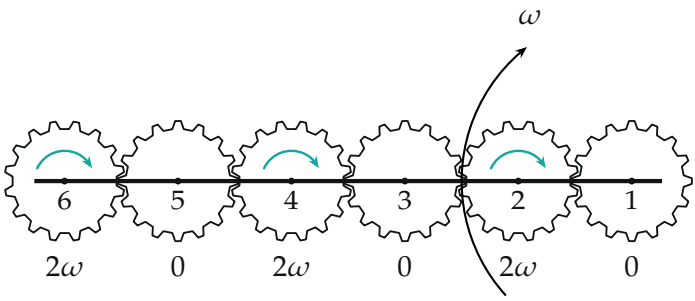


В системе отсчёта рычага (рычаг неподвижен): колёса 1, 3, 5 вращаются против часовой стрелки с ω, колёса 2, 4, 6 — по часовой с ω.

3. Возврат в неподвижную систему. Угловые скорости при переходе во вращающуюся систему отсчёта складываются: угловая скорость тела в неподвижной системе равна его угловой скорости во вращающейся плюс угловая скорость самой вращающейся системы. (Скорость любой точки тела складывается из переносной $\omega \times \vec{r}$, одинаковой для всех тел, вращающихся вместе с системой, и относительной.) Отсюда

$$\Omega_k = \omega'_k + \omega = ((-1)^k + 1)\omega = \begin{cases} 0, & k \text{ нечётное}, \\ 2\omega, & k \text{ чётное}. \end{cases}$$

Для колеса 6 (чётное): $\Omega_6 = 2\omega$, по часовой стрелке, как у рычага. Для колеса 5: $\Omega_5 = 0$.



В неподвижной системе: чётные колёса вращаются по часовой стрелке с 2ω, нечётные не вращаются (их центры идут по окружностям, оставаясь ориентированными, как кабинки колеса обозрения).

Второй способ: по скоростям точек, без смены системы отсчёта. Скорость центра колеса k равна скорости точки рычага на расстоянии $2(k-1)r$ от оси:

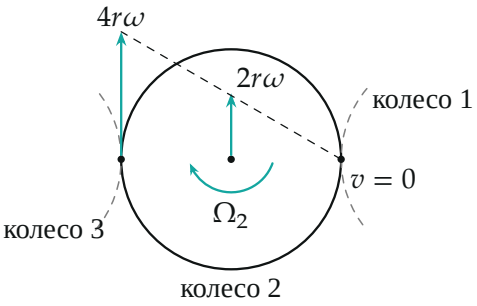
$$v_k = 2(k-1)\,r\omega.$$

Для колеса k запишем скорости его двух точек касания через скорость центра и вращение вокруг центра. Точка ближе к оси рычага (касание с колесом $k-1$) отстаёт от центра на $\Omega_k r$, а дальняя (касание с колесом $k+1$) обгоняет его на $\Omega_k r$:

$$u_{k-1,k} = v_k - \Omega_k r, \qquad u_{k,k+1} = v_k + \Omega_k r.$$

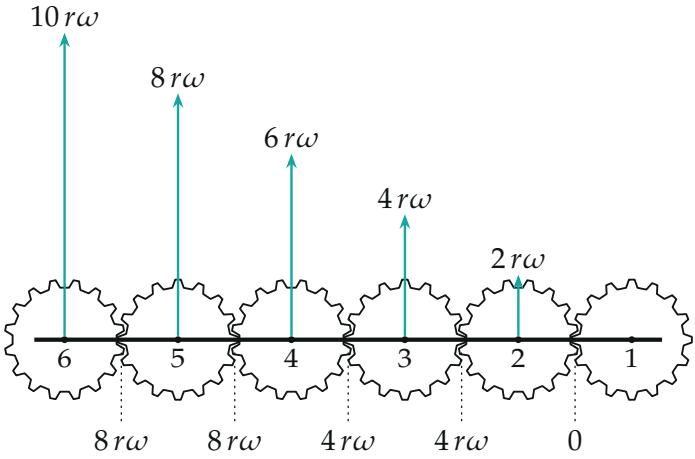
Скорость точки касания у соседних колёс одинакова, поэтому $u_{k,k+1}$ можно подставлять в уравнение для следующего колеса. Начнём с колеса 2: его точка касания с неподвижным колесом 1 имеет скорость $u_{12} = 0$, откуда

$$\Omega_2 = \frac{v_2 - u_{12}}{r} = 2\omega, \qquad u_{23} = v_2 + \Omega_2 r = 4r\omega.$$



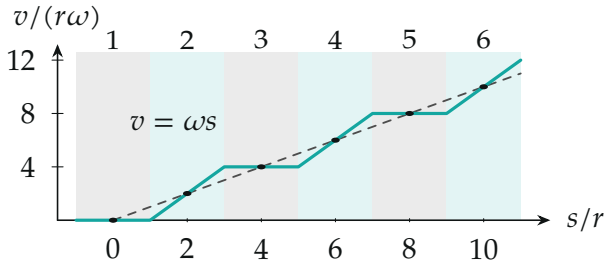
Колесо 2: в точке касания с неподвижным колесом 1 скорость равна нулю, центр движется со скоростью $2r\omega$, точка касания с колесом 3 — со скоростью $4r\omega$ (скорости точек колеса растут линейно с расстоянием от мгновенного центра, которым является точка касания с колесом 1).

Колесо 3: центр движется со скоростью $v_3 = 4r\omega$, точка касания с колесом 2 — тоже со скоростью $4r\omega$, поэтому $\Omega_3 = (v_3 - u_{23})/r = 0$: колесо 3 не вращается, а скорость его точки касания с колесом 4 равна $u_{34} = v_3 + 0 = 4r\omega$. Повторяем для колёс 4, 5, 6: $v_4 = 6r\omega$, $\Omega_4 = (6-4)\omega = 2\omega$, $u_{45} = 8r\omega$; $v_5 = 8r\omega$, $\Omega_5 = 0$, $u_{56} = 8r\omega$; $v_6 = 10r\omega$, $\Omega_6 = (10-8)\omega = 2\omega$. Ответ тот же.



Скорости центров колёс (бирюзовые стрелки, все направлены перпендикулярно рычагу) и точек касания соседних колёс (числа под рисунком): 0, $4r\omega$, $4r\omega$, $8r\omega$, $8r\omega$.

Картина вдоль рычага. Построим скорость точек колёс, лежащих на линии рычага, в зависимости от расстояния s до оси. Центры всех колёс лежат на прямой $v = \omega s$ (штриховая линия): они жёстко связаны с рычагом. У нечётных колёс скорость постоянна (колесо движется поступательно), у чётных растёт с наклоном 2ω (колесо вращается с 2ω). В точках касания соседних колёс скорости совпадают, поэтому ломаная непрерывна.



Скорость точек вдоль рычага: горизонтальные участки — нечётные колёса (поступательное движение), наклонные участки с наклоном 2 — чётные (вращение с 2ω). Точки — центры колёс, номер колеса над полосой.

Обратите внимание: скорость центра колеса 5 не нулевая, а $8r\omega$: у нечётных колёс нулевая угловая скорость, а центры движутся по окружностям вместе с рычагом. Угловая скорость Ω_k — это вращение колеса вокруг собственного центра, а не движение центра вокруг оси рычага.

Проверка. Размерность: Ω имеет размерность угловой скорости, с^{-1}. Третий способ — формула Виллиса для рядов зубчатых колёс одинакового радиуса: $(\Omega_k - \omega)/(\Omega_{k-1} - \omega) = -1$. Для $k = 2$: $\Omega_2 - \omega = -(0 - \omega)$, откуда $\Omega_2 = 2\omega$; для $k = 3$: $\Omega_3 - \omega = -(2\omega - \omega)$, откуда $\Omega_3 = 0$, и так далее. Все три способа дали $\Omega_6 = 2\omega$. Частный случай двух колёс: одно колесо обкатывает такое же неподвижное и за один оборот рычага делает два оборота (как монета, которая катится по такой же монете).

Физический смысл. Колесо вращается дважды: вместе с рычагом и за счёт зацепления с неподвижным колесом. У чётных колёс эти вращения складываются, у нечётных компенсируют друг друга.

Ответ. $\omega_6 = 2\omega$ (в ту же сторону, что и вращение рычага); колесо 5 не вращается, $\omega_5 = 0$.