Ошибка при монтаже люстры

Задача 3. [ИОШ 2019/20, 11 класс, задача 3] При монтаже трёхрожковой люстры, в которой планировалось установить одну лампу с номинальной мощностью $P_1 = 40$ Вт и две лампы с номинальной мощностью $P_2 = 60$ Вт, была допущена ошибка. Лампы были соединены так, как показано на рисунке. Какие мощности P'_1 и P'_2 будут выделяться на лампах при таком подключении? Как нужно исправить подключение ламп?

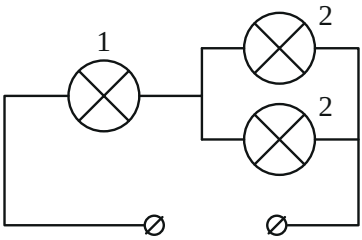


Схема из условия: лампа 1 (40 Вт) включена последовательно с двумя лампами 2 (по 60 Вт), соединёнными параллельно.

▲ **Решение. Что происходит.** Две лампы по 60 Вт включены параллельно, и эта пара стоит последовательно с лампой 40 Вт. Каждая лампа рассчитана на напряжение сети U, но теперь сеть делится между лампой 1 и парой ламп 2: на каждой лампе напряжение меньше номинального, а мощность падает ещё сильнее, потому что при неизменном сопротивлении $P = U^2/R$. Главная идея — сопротивление лампы находим из её номинальных данных, дальше обычный расчёт цепи из последовательного и параллельного соединений. Забегая вперёд: слабая по паспорту лампа 40 Вт окажется заметно ярче мощных ламп 60 Вт.

Обозначения. U — напряжение сети (на него рассчитаны все лампы: их собирались включить параллельно); R_1, R_2 — сопротивления ламп 40 Вт и 60 Вт; I — ток в неразветвлённой части цепи; U_1, U_2 — напряжения на лампе 1 и на паре ламп 2. Сопротивление каждой лампы считаем постоянным.

1. Сопротивления ламп. В номинальном режиме на лампе напряжение U и мощность P. По закону Джоуля — Ленца для участка цепи

$P = U^2/R$, откуда

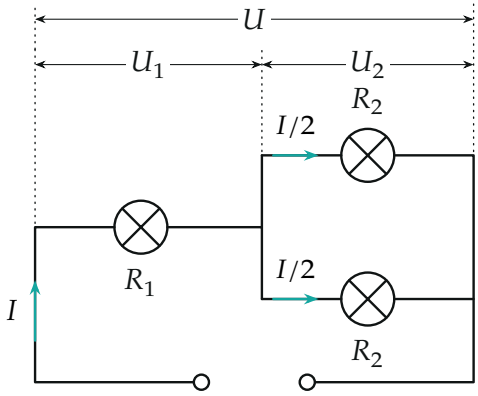
$$R_1 = \frac{U^2}{P_1}, \qquad R_2 = \frac{U^2}{P_2}.$$

Лампа большей мощности имеет меньшее сопротивление: $R_2/R_1 = P_1/P_2 = 2/3$.

2. Эквивалентная схема. Две одинаковые лампы 2 соединены параллельно: напряжение на них одно, токи равны, поэтому общее сопротивление пары равно $R_2/2$. Эта пара последовательна с лампой 1, значит

$$R = R_1 + \frac{R_2}{2} = \frac{U^2}{P_1} + \frac{U^2}{2P_2} = \frac{U^2\,(P_1 + 2P_2)}{2P_1P_2}.$$

Сопротивления в цепи относятся как $R_1 : \dfrac{R_2}{2} = \dfrac{1}{P_1} : \dfrac{1}{2P_2} = 2P_2 : P_1 = 120 : 40 = 3 : 1$.



Токи и напряжения: через лампу 1 идёт I, через каждую лампу 2 — $I/2$; $U = U_1 + U_2$.

3. Ток в цепи. По закону Ома для всей цепи

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2P_1P_2}{U\,(P_1 + 2P_2)}.$$

Через лампу 1 идёт весь ток I (последовательное соединение), через каждую из двух ламп 2 — $I/2$ (параллельные одинаковые ветви).

4. Мощности на лампах. Мощность лампы — по закону Джоуля — Ленца для её участка:

$$P_1' = I^2 R_1 = \frac{4P_1^2 P_2^2}{U^2(P_1+2P_2)^2}\cdot\frac{U^2}{P_1} = \frac{4P_1P_2^2}{(P_1+2P_2)^2},$$

$$P_2' = \left(\frac{I}{2}\right)^2 R_2 = \frac{P_1^2P_2^2}{U^2(P_1+2P_2)^2}\cdot\frac{U^2}{P_2} = \frac{P_1^2P_2}{(P_1+2P_2)^2}.$$

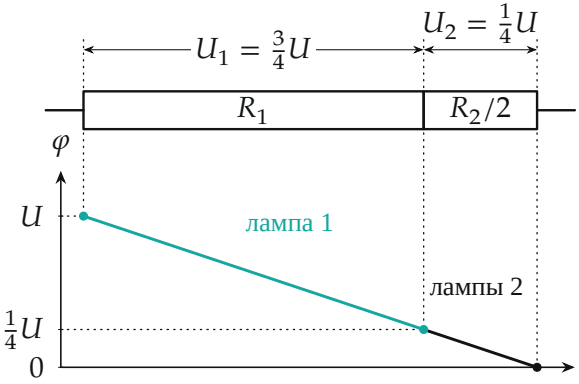
Напряжение U сократилось: нужна только пропорция мощностей. Подставим $P_1 = 40$ Вт, $P_2 = 60$ Вт, $P_1 + 2P_2 = 160$ Вт:

$$P_1' = \frac{4\cdot 40\cdot 60^2}{160^2} = 22{,}5 \text{ Вт}, \qquad P_2' = \frac{40^2\cdot 60}{160^2} = 3{,}75 \text{ Вт}.$$

Второй способ: через напряжения. Цепь — делитель напряжения: ток один, поэтому напряжение делится пропорционально сопротивлениям $R_1 : R_2/2 = 3:1$, то есть $U_1 = \frac{3}{4}U$, $U_2 = \frac{1}{4}U$. Мощность лампы с постоянным сопротивлением пропорциональна квадрату напряжения: $P = P_{\text{ном}}(U'/U)^2$. Тогда

$$P_1' = 40\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = 22{,}5 \text{ Вт}, \qquad P_2' = 60\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = 3{,}75 \text{ Вт}.$$

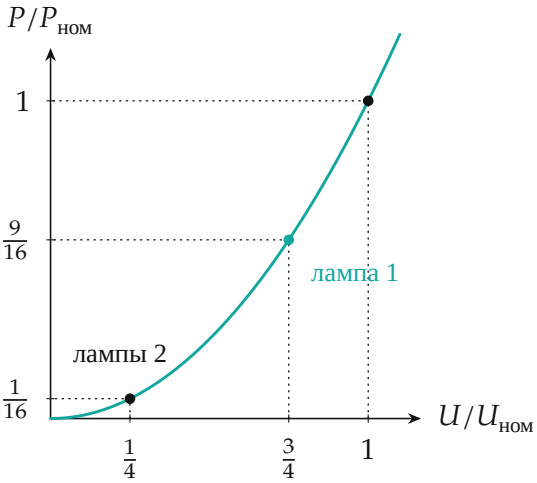
Совпало с первым способом.



Сверху — цепочка сопротивлений R_1 и $R_2/2$, снизу — потенциал вдоль неё.

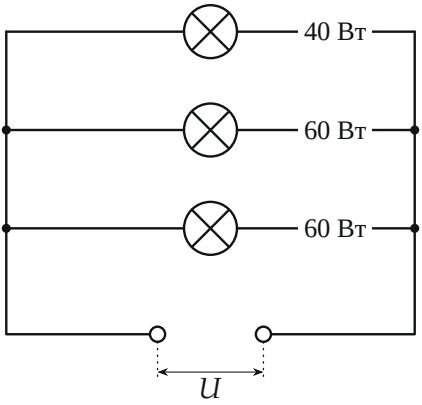
Падение напряжения на участке пропорционально его сопротивлению: на лампе 1 теряется $3/4$ напряжения сети, на паре ламп — $1/4$.

5. Почему так мало и как исправить. Мощность лампы зависит от напряжения квадратично, поэтому небольшая потеря напряжения даёт большую потерю мощности: четверть напряжения на лампах 2 означает $(1/4)^2 = 1/16$ их номинальной мощности.



Мощность лампы с постоянным сопротивлением — парабола $P/P_{ном} = (U/U_{ном})^2$. Лампа 1 работает при $3/4$ номинального напряжения, лампы 2 — при $1/4$.

Лампа в люстре должна работать под номинальным напряжением, а оно есть только у сети. Поэтому все три лампы нужно соединить параллельно и подключить к сети: напряжение на параллельных ветвях одно и то же, и каждая лампа получит своё U и свою номинальную мощность, независимо от остальных.



Правильное включение: все лампы параллельно, на каждой напряжение сети U; суммарная мощность $40 + 60 + 60 = 160$ Вт.

Проверка. Размерность: P_1' и P_2' — мощности, Вт $\cdot$ Вт^2/Вт^2 = Вт. Предельные случаи: если $P_2 \to \infty$ (пара ламп 2 почти закорочена, её сопротивление мало), то $P_1' \to P_1$: вся сеть на лампе 1; если $P_1 \to \infty$, то $P_2' \to P_2$ и вся сеть на паре ламп 2. Баланс мощностей: вся цепь потребляет $U^2/R = \dfrac{2P_1P_2}{P_1 + 2P_2} = 30$ Вт, а на лампах выделяется $P_1' + 2P_2' = 22{,}5 + 7{,}5 = 30$ Вт. Сумма сходится. Для сравнения, при параллельном включении цепь потребляла бы 160 Вт.

Физический смысл. В неправильной схеме две мощные лампы почти не светятся (1/16 номинала), а лампа 40 Вт светится на 9/16 номинала. Из-за делителя напряжения «слабая» лампа оказывается самой яркой в люстре.

Ответ. $P_1' = \dfrac{4P_1P_2^2}{(P_1 + 2P_2)^2} = 22{,}5$ Вт (лампа 40 Вт); $P_2' = \dfrac{P_1^2P_2}{(P_1 + 2P_2)^2} = 3{,}75$ Вт (каждая из ламп 60 Вт). Все три лампы нужно включить параллельно друг другу в сеть, чтобы на каждой было номинальное напряжение.