Мезолябия Эратосфена

Задача 5. [ИОШ 2019/20, 11 класс, задача 5] В 3 веке до н.э. греческий инженер Эратосфен придумал мезолябию — прибор, позволяющий извлекать кубические корни. Мезолябия состоит из двух направляющих, по которым могут перемещаться три одинаковых прямоугольных треугольника. Треугольники располагают так, что вершина прямого угла треугольника 2 совпадает с вершиной острого угла треугольника 1, а вершина треугольника 1 и точки пересечения треугольников 2 и 3 (перевёрнутого) лежат на одной прямой (эти точки отмечены кружками). Длине какого отрезка равен кубический корень из расстояния между направляющими? В каких единицах измерения?

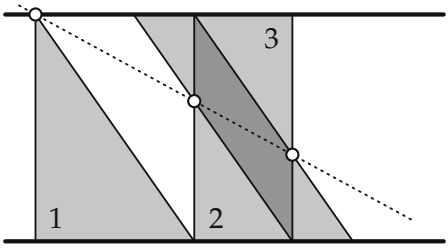
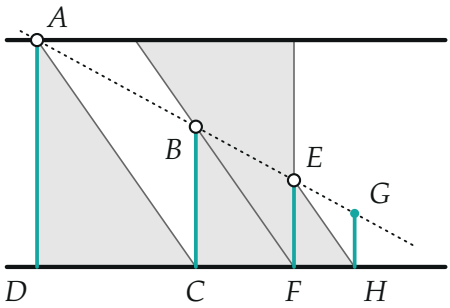


Рисунок из условия: три одинаковых прямоугольных треугольника между двумя направляющими; кружки — вершина A треугольника 1 и точки пересечения треугольников 2 и 3; пунктирная линия проходит через них.

▲ **Решение. Что происходит.** Вопрос задачи — какой отрезок на чертеже равен $\sqrt[3]{AD}$. Кубический корень из числа возникает, когда есть цепочка из четырёх чисел, у которой отношение каждого к следующему одно и то же: $x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = x_3 : x_4 = q$. Тогда $x_1 = q^3 x_4$, и $\sqrt[3]{x_1/x_4} = q = x_3/x_4$. На чертеже такую цепочку должны дать четыре параллельных отрезка. Все отношения возникают из подобия прямоугольных треугольников: у трёх одинаковых треугольников гипотенузы параллельны, поэтому на чертеже много подобных треугольников с параллельными сторонами. Класс задачи — геометрия подобия и пропорциональные отрезки.

Обозначения. A — вершина треугольника 1 на верхней направляющей, D, C — его вершины на нижней; B — точка пересечения вертикального катета треугольника 2 с гипотенузой треугольника 3; E — точка пересечения вертикального катета треугольника 3 с гипотенузой треугольника 2; F — нижняя вершина треугольника 3, H — нижний конец гипотенузы треугольника 2. Точки A, B, E лежат на одной прямой.

1. Вспомогательный отрезок. Продолжим пунктирную прямую ABE вправо и проведём из точки H перпендикуляр к направляющим до пересечения с этой прямой в точке G. Теперь у нас четыре отрезка, перпендикулярных направляющим: AD, BC, EF, GH. Они параллельны друг другу, и цепочку из четырёх чисел нужно искать среди них.



Четыре параллельных отрезка AD, BC, EF, GH (бирюзовые), перпендикулярные направляющим. Точка G лежит на прямой ABE над точкой H.

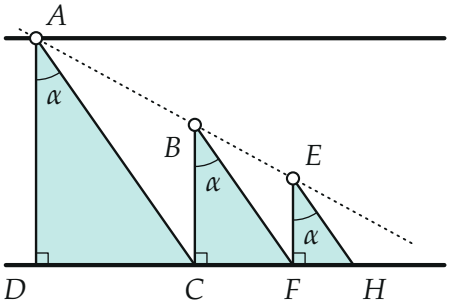
2. Первая серия подобных треугольников: ACD, BFC, EHF. Все три прямоугольные: прямые углы при D, C, F образованы вертикальным катетом и направляющей. Гипотенузы AC, BF, EH параллельны: AC — гипотенуза треугольника 1, отрезок BF лежит на гипотенузе перевёрнутого треугольника 3, а EH — на гипотенузе треугольника 2. Гипотенузы параллельны: треугольник 3 получается из остальных поворотом на 180°, а при таком повороте любая прямая переходит в параллельную. Параллельные гипотенузы дают равные острые углы α (на рисунке — при A, B, E), поэтому треугольники подобны. Сходственные катеты: $AD \leftrightarrow BC \leftrightarrow EF$ (вертикальные) и $DC \leftrightarrow CF \leftrightarrow FH$ (горизонтальные).

Из равенства отношений катетов

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BC}{CF} = \frac{EF}{FH}$$

следует

$$\frac{AD}{BC} = \frac{DC}{CF}, \qquad \frac{BC}{EF} = \frac{CF}{FH}. \tag{1}$$



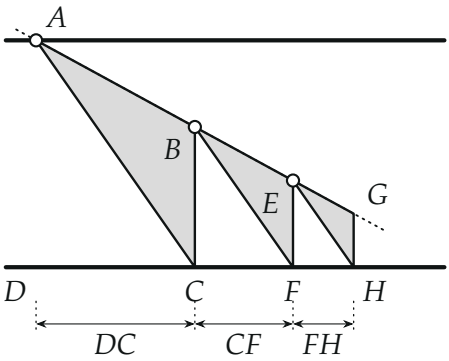
Первая серия: $\triangle ACD \sim \triangle BFC \sim \triangle EHF$ (залиты бирюзовым). Прямые углы при D, C, F, равные углы α при A, B, E.

3. Вторая серия подобных треугольников: ABC, BEF, EGH. Их стороны попарно параллельны: AB, BE, EG лежат на одной прямой, $BC \parallel EF \parallel GH$ (перпендикуляры к направляющим) и $AC \parallel BF \parallel EH$ (гипотенузы). Треугольники с соответственно параллельными сторонами подобны, и сходственные стороны $AB \leftrightarrow BE \leftrightarrow EG$ и $BC \leftrightarrow EF \leftrightarrow GH$ пропорциональны:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{BE}, \qquad \frac{EF}{GH} = \frac{BE}{EG}.$$

Теперь свяжем эти отношения с горизонтальными расстояниями. Вертикали AD, BC, EF, GH параллельны, поэтому по теореме о пропорциональных отрезках (теореме Фалеса) они отсекают на секущей $ABEG$ отрезки, пропорциональные расстояниям между вертикалями: $AB : BE : EG = DC : CF : FH$. Значит,

$$\frac{BC}{EF} = \frac{DC}{CF}, \qquad \frac{EF}{GH} = \frac{CF}{FH}. \tag{2}$$



Вторая серия: $\triangle ABC \sim \triangle BEF \sim \triangle EGH$ (залиты серым); отрезки AB, BE, EG делятся вертикалями в отношении $DC : CF : FH$.

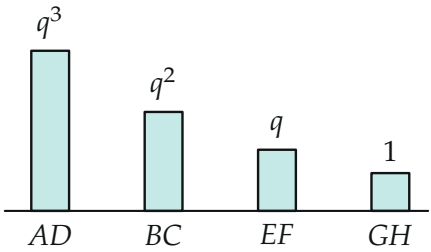
4. Цепочка равных отношений. Сравним формулы (1) и (2). В них одни и те же отношения горизонтальных расстояний DC/CF и CF/FH:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{DC}{CF} = \frac{BC}{EF}, \qquad \frac{BC}{EF} = \frac{CF}{FH} = \frac{EF}{GH}.$$

Склеиваем:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{BC}{EF} = \frac{EF}{GH}.$$

Обозначим это общее отношение через q. Тогда $EF = q\,GH$, $BC = q\,EF = q^2 GH$, $AD = q\,BC = q^3 GH$.



Четыре параллельных отрезка образуют геометрическую прогрессию: если принять GH за единицу длины, то $GH = 1$, $EF = q$, $BC = q^2$, $AD = q^3$. Высоты столбцов построены для чертежа из условия ($q = (1 + \sqrt{5})/2$).

5. Кубический корень. Из $AD = q^3\,GH$ получаем $\dfrac{AD}{GH} = q^3$, то есть

$$\sqrt[3]{\frac{AD}{GH}} = q = \frac{EF}{GH}.$$

Равенство означает: расстояние между направляющими AD, измеренное в единицах длины GH, равно числу q^3, а длина отрезка EF, измеренная в тех же единицах, равна числу q. Поэтому кубический корень из расстояния между направляющими равен длине отрезка EF, если единицей длины служит отрезок GH.

Обратите внимание: корень из длины имеет смысл только после выбора единицы. Верно равенство отношений $\sqrt[3]{AD/GH} = EF/GH$, а запись $\sqrt[3]{AD} = EF$ верна лишь тогда, когда единица длины равна GH.

Проверка. Размерность: AD/GH, EF/GH безразмерны, равенство выполнено в любых единицах длины, лишь бы они были одинаковы. Проверка по координатам: пусть катеты треугольников $a = AD$ и $b = DC$, расстояние $CF = \varphi$. Из подобия $BC = a\varphi/b$, $EF = a(b-\varphi)/b$; условие, что A, B, E лежат на одной прямой, даёт $\varphi^2 = b(b-\varphi)$, откуда $\varphi/b = (\sqrt{5}-1)/2$. Тогда $GH = a\,(2\varphi - b)/b$ и $AD : BC : EF : GH = q^3 : q^2 : q : 1$ при $q = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$, как и найдено выше (численно сверено в python по координатам чертежа). Заметим: при расположении, буквально заданном в условии (треугольник 2 приставлен к острому углу треугольника 1), чертёж жёсткий, и AD/GH всегда равно $q^3 \approx 4{,}24$. В настоящем приборе треугольники сдвигают, подбирая нужное отношение AD/GH; вопрос задачи (какой отрезок равен корню и в каких единицах) от этого не зависит.

Физический смысл. Построить кубический корень циркулем и линейкой нельзя, а прибор делает его измерением длины: надо двигать треугольники, пока три точки не встанут на одну прямую.

Ответ. Кубический корень из расстояния между направляющими равен длине отрезка EF при условии, что единицей длины служит отрезок GH.