Фрикционная передача на двух конусах

Задача 6. [ИОШ 2019/20, 11 класс, задача 6] Рассмотрите модель передачи вращения между двумя параллельными осями, основанную на трении. Два одинаковых конуса — ведущий и ведомый — прижимаются друг к другу по образующей (см. рисунок). К оси ведущего конуса приложен момент внешних сил M, при этом ведущий конус вращается равномерно, благодаря силе трения, действующей на него со стороны ведомого конуса. На каком расстоянии от вершины ведущего конуса находится такое сечение конусов, в котором точки их поверхностей имеют одинаковые линейные скорости? Конусы прижаты друг к другу равномерно по образующей с силой N. Угол при вершине конусов α, коэффициент трения между конусами μ, высота конусов h.

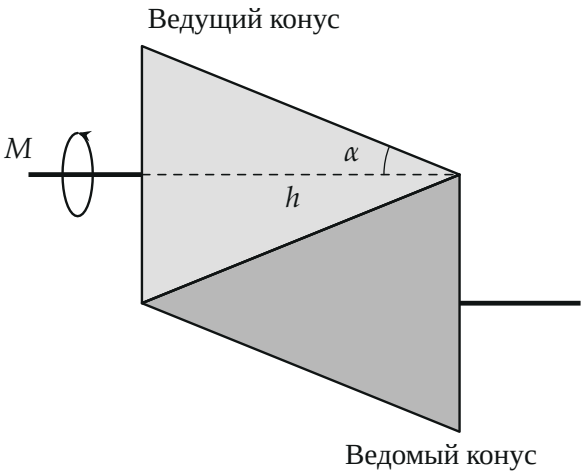
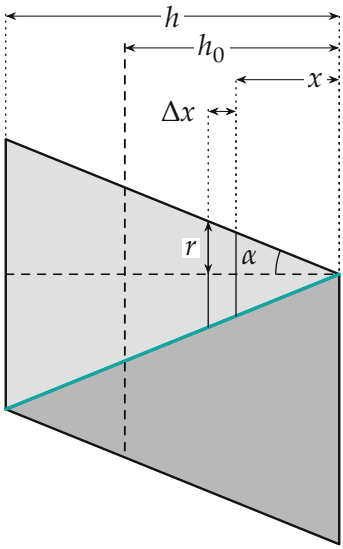


Рисунок из условия: ведущий конус (вершина справа), ведомый конус (вершина слева), прижаты по общей образующей; M — момент внешних сил на оси ведущего конуса, α — угол между осью и образующей, h — высота.

▲ **Решение. Что происходит.** Ведущий конус вращается равномерно, поэтому сумма моментов сил относительно его оси равна нулю: внешний момент M уравновешен моментом сил трения со стороны ведомого

конуса. Конусы повёрнуты вершинами в разные стороны, поэтому линейная скорость точки ведущего конуса растёт с удалением от его вершины, а ведомого — убывает. Значит, есть одно сечение с равными скоростями, а в остальных точках конусы проскальзывают друг по другу. Ближе к основанию ведущий конус «быстрее» ведомого, и трение его тормозит; ближе к вершине ведущий «медленнее», и трение его разгоняет. Суммарно трение должно тормозить ведущий конус на M. Главная идея — записать момент трения для тонкого слоя, а затем сложить вклады всех слоёв (сумма такого вида есть площадь под графиком).

Обозначения. Ось x направим вдоль оси ведущего конуса от его вершины к основанию; x — расстояние слоя от вершины, Δx — его толщина, $r = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ — радиус слоя. α — угол между осью и образующей, как на рисунке (если бы α означало полный угол раствора, везде стояло бы $\mathrm{tg}(\alpha/2)$). h_0 — расстояние от вершины ведущего конуса до сечения равных скоростей; ω_1, ω_2 — угловые скорости ведущего и ведомого конусов.

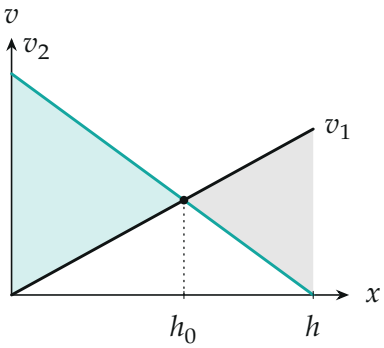


Сечение плоскостью осей; бирюзовая линия — общая образующая. x — расстояние до слоя толщиной Δx и радиусом r, h_0 — до сечения равных скоростей (штриховая вертикаль).

1. Где какая скорость. Точка контакта на расстоянии x от вершины ведущего конуса лежит на ободе слоя радиуса $x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ведущего конуса и на ободе слоя радиуса $(h-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ведомого (у ведомого конуса вершина на другом конце образующей). Их линейные скорости:

$$v_1 = \omega_1 x\,\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad v_2 = \omega_2 (h-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

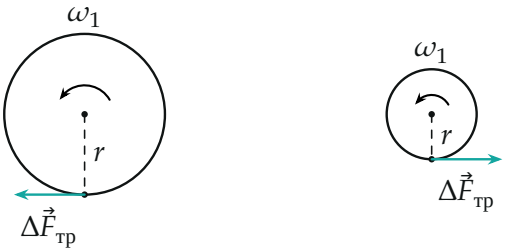
Скорость v_1 растёт с x, v_2 убывает, поэтому они равны ровно в одной точке $x = h_0$. Слева от неё ($x < h_0$) $v_2 > v_1$, справа ($x > h_0$) $v_1 > v_2$.



$x < h_0$: разгоняет $x > h_0$: тормозит

Линейные скорости точек контакта: v_1 растёт с расстоянием от вершины ведущего конуса, v_2 убывает; сечение равных скоростей — точка пересечения графиков.

2. Направление трения. Трение скольжения направлено против скорости контактной точки ведущего конуса относительно ведомого. При $x > h_0$ ведущий конус «быстрее»: трение направлено против его скорости, то есть тормозит. При $x < h_0$ ведущий «медленнее»: трение направлено по его скорости, то есть разгоняет. Проскальзывание есть всюду, кроме $x = h_0$, поэтому всюду действует трение скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N_{\text{слоя}}$.



$x > h_0$: ведущий быстрее, трение тормозит $x < h_0$: ведущий медленнее, трение разгоняет

Вид вдоль оси на два слоя ведущего конуса (контакт — нижняя точка). Слева $x > h_0$: слой быстрее ведомого, сила трения направлена против вращения. Справа $x < h_0$: слой медленнее, трение направлено по вращению.

3. Сила и момент для тонкого слоя. Прижимающая сила N распределена равномерно вдоль образующей, на слой толщиной Δx приходится $\Delta N = N\,\Delta x/h$. Сила трения слоя

$$\Delta F_{\text{тр}} = \mu\,\Delta N = \mu N\frac{\Delta x}{h}.$$

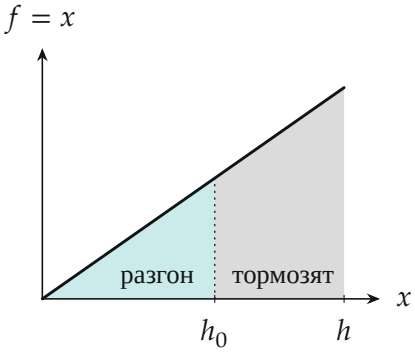
Она направлена по касательной к окружности слоя, поэтому её плечо относительно оси равно радиусу $r = x\operatorname{tg}\alpha$. Нормальная сила лежит в плоскости, проходящей через ось, и момента относительно оси не создаёт. Момент трения слоя

$$\Delta M_{\text{тр}} = \Delta F_{\text{тр}}\,r = \frac{\mu N\operatorname{tg}\alpha}{h}\,x\,\Delta x.$$

4. Сумма по слоям. Тормозящие слои — от $x = h_0$ до $x = h$, разгоняющие — от $x = 0$ до $x = h_0$. Обозначим $k = \dfrac{\mu N\operatorname{tg}\alpha}{h}$. Тогда

$$M_{\text{торм}} = k\sum x\,\Delta x \quad (h_0 \le x \le h), \qquad M_{\text{разг}} = k\sum x\,\Delta x \quad (0 \le x \le h_0).$$

Сумма $\sum x\,\Delta x$ — площадь под графиком функции $f(x) = x$ на заданном отрезке: для x от 0 до h_0 это треугольник площади $h_0^2/2$, для x от h_0 до h — трапеция площади $(h^2 - h_0^2)/2$.



Вклады слоёв в момент пропорциональны $f(x) = x$. Площадь под графиком от 0 до h_0 — разгоняющий момент, от h_0 до h — тормозящий.

Значит

$$M_{\text{торм}} = \frac{k}{2}(h^2 - h_0^2), \qquad M_{\text{разг}} = \frac{k}{2}h_0^2.$$

5. Условие равномерного вращения. Ведущий конус вращается равномерно, поэтому сумма моментов относительно его оси равна нулю. Внешний момент M вращает конус, трение суммарно тормозит: тормозящий момент больше разгоняющего, и слои по разные стороны от h_0 входят с разными знаками.

$$M = M_{\text{торм}} - M_{\text{разг}} = \frac{k}{2}(h^2 - 2h_0^2) = \frac{\mu N \operatorname{tg}\alpha}{2h}(h^2 - 2h_0^2).$$

Неизвестным осталось h_0: выразим его из уравнения:

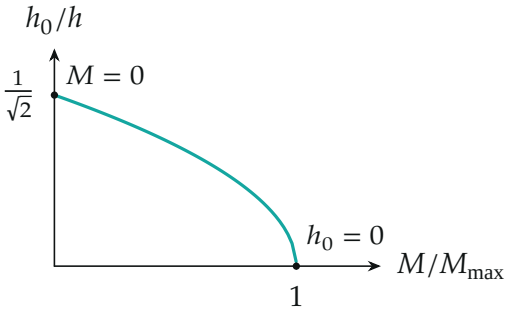
$$h^2 - 2h_0^2 = \frac{2hM}{\mu N \operatorname{tg}\alpha} \;\Rightarrow\; h_0 = \sqrt{\frac{h^2}{2} - \frac{hM}{\mu N \operatorname{tg}\alpha}}.$$

6. Когда есть решение. Подкоренное выражение неотрицательно при

$$M \le M_{\max} = \frac{\mu N h \operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

Тогда h_0 существует и не больше $h/\sqrt{2}$. При $M = 0$ тормозящий и разгоняющий моменты равны, $h_0 = h/\sqrt{2}$ — ближе к основанию, чем к

вершине. С ростом M сечение равных скоростей сдвигается к вершине; то же происходит при уменьшении N или μ (при уменьшении μN значение $M/(\mu N)$ растёт). При $M = M_{\max}$ получаем $h_0 = 0$: ведущий конус проскальзывает по ведомому по всей образующей. При $M > M_{\max}$ трения не хватает, и равномерное вращение невозможно.



Положение сечения равных скоростей: при $M = 0$ оно на расстоянии $h/\sqrt{2}$ от вершины, при $M = M_{\max}$ доходит до вершины.

7. Побочный результат. Из равенства скоростей в сечении $x = h_0$: $\omega_1 h_0 \operatorname{tg}\alpha = \omega_2 (h - h_0) \operatorname{tg}\alpha$, откуда $\omega_2/\omega_1 = h_0/(h - h_0)$.

Проверка. Размерность: $\mu N \operatorname{tg}\alpha$ — сила, $hM/(\mu N \operatorname{tg}\alpha)$ — м · Н · м/Н = м^2, как и h^2. Предел $M = 0$: уравнение $\int_0^{h_0} x\,dx = \int_{h_0}^{h} x\,dx$ даёт $h_0 = h/\sqrt{2}$. Предел $M = M_{\max}$: при $h_0 = 0$ все слои тормозят, момент равен $\mu N \operatorname{tg}\alpha\, h/2 = \mu N\, r_{\text{ср}}$, где $r_{\text{ср}} = h \operatorname{tg}\alpha/2$ — средний радиус, что и должно быть. Суммирование по $2 \cdot 10^5$ слоям в python совпало с формулой.

Физический смысл. Чем больше нагрузка M, тем больше слоёв тормозят ведущий конус и тем ближе к вершине сечение равных скоростей.

Ответ. $h_0 = \sqrt{\dfrac{h^2}{2} - \dfrac{hM}{\mu N \operatorname{tg}\alpha}}$ — расстояние от вершины ведущего конуса до сечения равных скоростей; α — угол между осью и образующей, решение существует при $M \le \mu N h \operatorname{tg}\alpha/2$.