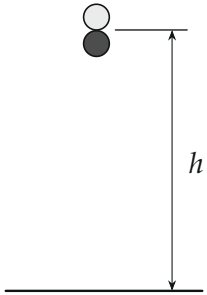
Пинг-понг и каучуковый шарик

Задача 2. [ИОШ 2019/20, 9 класс, задача 2] Два маленьких шарика — легкий от пинг-понга и тяжелый каучуковый бросают вместе на пол с высоты h (шарик от пинг-понга — сверху; каучуковый — снизу; см. рисунок). Шарики падают на землю, каучуковый шарик отражается от земли. Считая, что все столкновения шариков упругие, между шариками есть небольшой зазор и шарик от пинг-понга много легче каучукового шарика, найти, на какую высоту подпрыгнет шарик от пинг-понга. Размеры шариков много меньше высоты h. Сопротивлением воздуха пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на упругие удары и смену системы отсчёта. Оба шарика падают с одним ускорением g и у пола имеют одну и ту же скорость v. Небольшой зазор разделяет события: сначала каучуковый шарик ударяется о пол и отскакивает вверх со скоростью v, а через мгновение встречает шарик от пинг-понга, который ещё летит вниз со скоростью v. Лёгкий шарик налетает на тяжёлый, как на «стенку», которая сама едет ему навстречу, — и отскакивает с утроенной скоростью. Главная идея — рассмотреть этот удар в системе отсчёта тяжёлого шарика, где он покоится.

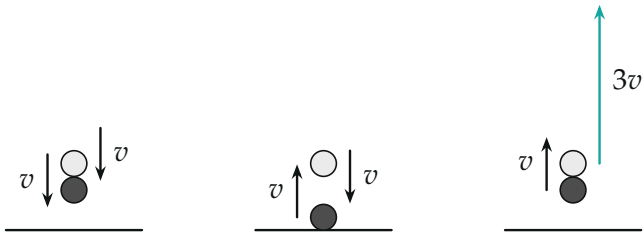
Обозначения. m — масса шарика от пинг-понга, M — масса каучукового ($m \ll M$); v — скорость шариков у пола; u — скорость лёгкого шарика после удара; H — высота его подъёма. Ось y направим вертикально вверх.

1. Скорость у пола. Закон сохранения механической энергии для каждого шарика при падении с высоты h (сопротивления воздуха нет):

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Масса сократилась, поэтому скорости шариков одинаковы, и они долетают до пола вместе (зазор много меньше h).

2. Удар каучукового шарика о пол. Удар упругий, пол неподвижен: модуль скорости сохраняется, направление меняется на противоположное. Сразу после удара: $v_{\text{кy}} = +v$, а у лёгкого шарика, который пола ещё не коснулся, $v_{\text{пy}} = -v$ (рисунок, этап б).



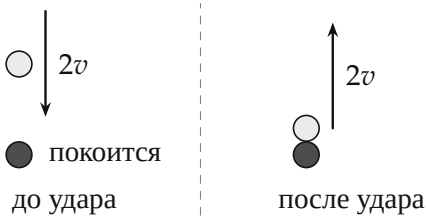
а) у пола б) отскок от пола в) после удара

Три момента в системе отсчёта Земли: оба шарика у пола со скоростью v вниз; каучуковый отскочил и движется вверх навстречу лёгкому; лёгкий после удара летит вверх со скоростью $3v$.

3. Удар шариков в системе отсчёта каучукового шарика. Удар длится очень короткое время, за которое скорость каучукового шарика почти не меняется (он много тяжелее). Поэтому перейдём в инерциальную систему отсчёта, которая движется вверх со скоростью v вместе с каучуковым шариком. Закон сложения скоростей $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{СО}}$ в проекции на ось y даёт для лёгкого шарика до удара

$$v'_{\text{пy}} = -v - v = -2v,$$

а каучуковый шарик в этой системе покоится. Лёгкий шарик налетает на покоящееся очень тяжёлое тело и упруго отскакивает, как мяч от стены: модуль скорости сохраняется, $v'_{\text{пy}} = +2v$ после удара.



Тот же удар в системе отсчёта каучукового шарика: лёгкий шарик подлетает со скоростью $2v$ и отскакивает со скоростью $2v$.

4. Возврат в систему Земли. Снова закон сложения скоростей, теперь $\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{СО}}$, в проекции на ось y:

$$u = 2v + v = 3v.$$

Скорость направлена вверх (знак плюс).

5. Высота подъёма. Закон сохранения механической энергии для лёгкого шарика при подъёме со скоростью u до остановки:

$$\frac{mu^2}{2} = mgH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(3v)^2}{2g} = 9 \cdot \frac{v^2}{2g} = 9h.$$

Каучуковый шарик почти не теряет скорость ($M \gg m$) и подпрыгивает практически на ту же высоту h.

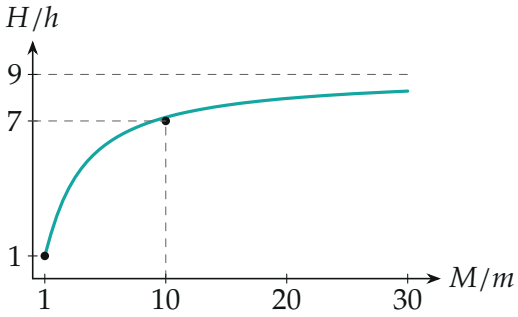
Второй способ: формула упругого удара. Законы сохранения импульса и энергии для центрального упругого удара шариков с проекциями скоростей $+v$ (каучуковый) и $-v$ (лёгкий) дают скорость лёгкого шарика после удара

$$u = \frac{(m-M)(-v) + 2Mv}{M+m} = \frac{(3M-m)\,v}{M+m} \xrightarrow{m \ll M} 3v,$$

а отношение высот

$$\frac{H}{h} = \left(\frac{3M/m - 1}{M/m + 1}\right)^2.$$

При $M = m$ получаем $u = v$ (шарики обменялись скоростями, лёгкий поднимется лишь на h), при $M/m = 10$ — уже $H \approx 7h$, а при $M/m \to \infty$ — предел $9h$.



Высота подъёма лёгкого шарика в зависимости от отношения масс (по формуле второго способа): кривая подходит к пределу 9h снизу.

Обратите внимание. Нужен именно зазор между шариками: тогда сначала происходит удар о пол, а потом удар шариков, и каждый из них — простой удар двух тел. В системе отсчёта тяжёлого шарика лёгкий отскакивает со скоростью $2v$, а не v: к его собственной скорости добавляется скорость «стенки», бегущей навстречу.

Ответ «матрёшкой»:

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(3v)^2}{2g} = \frac{9 \cdot 2gh}{2g} = 9h.$$

Проверка. Размерность: $[H] =$ м, как у h. Энергия: лёгкий шарик получил энергию $9mgh$ вместо mgh, лишние $8mgh$ отдал каучуковый шарик; при $M \gg m$ это ничтожная доля его энергии Mgh, поэтому он и подпрыгивает почти на h. Предел $M = m$ из второго способа даёт $H = h$ — шарики просто обмениваются скоростями, как и должно быть при упругом ударе равных масс.

Смысл: тяжёлый шарик работает как «ракетка», летящая навстречу мячу, — скорость мяча в системе Земли утраивается, а высота растёт в девять раз.

Ответ. Шарик от пинг-понга подпрыгнет на высоту $H = 9h$ (каучуковый — практически на высоту h).