Четыре шара: пирамида

Задача 5. [ИОШ 2019/20, 9 класс, задача 5] Три одинаковых шара массой m каждый кладут на горизонтальную поверхность так, что все шары касаются друг друга. Сверху на шары кладут ещё один такой же шар (см. рисунок; вид сверху). Трение между всеми шарами отсутствует, между шарами и горизонтальной поверхностью есть трение. При каком минимальном коэффициенте трения скольжения между шарами и поверхностью шары не раскатятся?

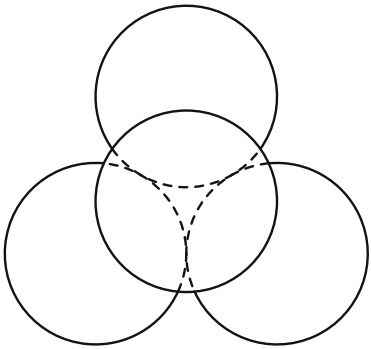


Рисунок из условия (вид сверху): три шара на поверхности, четвёртый лежит на них; штриховые линии — закрытые верхним шаром части контуров нижних шаров.

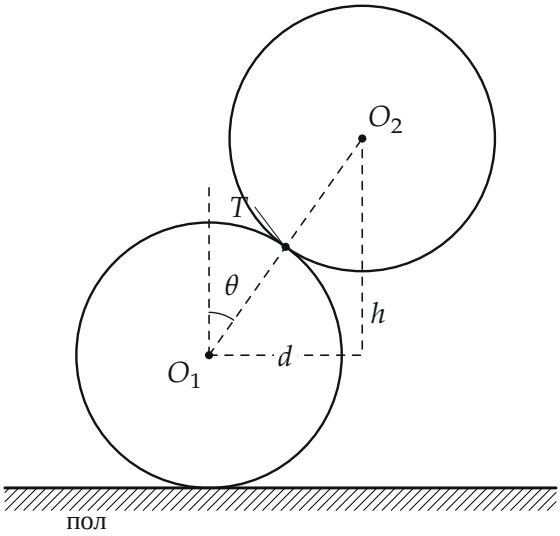
▲ **Решение.** **Что происходит.** Верхний шар давит на каждый нижний вдоль линии центров, то есть вниз и в сторону от центра пирамиды. Нижние шары удерживает только трение о пол. Класс задачи — статика твёрдого тела с трением: нужно проверить оба условия равновесия, и для сил, и для моментов. Тонкость в том, что шар, в отличие от бруска, может не только скользить, но и катиться, поэтому условие моментов для него жёстче условия сил. Главная идея — записать моменты относительно центра нижнего шара: через него идут все силы, кроме трения.

Обозначения. R — радиус шара; O_1 — центр нижнего шара, P — его точка касания с полом; θ — угол между линией центров верхнего и

нижнего шаров и вертикалью; N — модуль силы, с которой шары действуют друг на друга в точке касания верхнего шара с нижним; $\vec{N}_1$ — нормальная реакция пола, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения пола, μ — коэффициент трения шара о пол. Шары считаем твёрдыми и гладкими друг о друга, пол — жёстким; трением качения пренебрегаем.

1. Геометрия. Все четыре шара попарно касаются, поэтому их центры — вершины правильного тетраэдра с ребром $2R$. Центры нижних шаров образуют правильный треугольник со стороной $2R$, центр верхнего шара лежит над центром этого треугольника. Расстояние от вершины треугольника до его центра равно $d = 2R/\sqrt{3}$. Линия центров верхнего и нижнего шара имеет длину $2R$, поэтому

$$\sin\theta = \frac{d}{2R} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \theta \approx 35°.$$



Сечение вертикальной плоскостью через центр верхнего шара и центр одного из нижних: $d = 2R/\sqrt{3}$ — горизонтальное, $h = \sqrt{8/3}\,R$ — вертикальное расстояние между центрами, T — точка касания шаров.

2. Верхний шар. На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и три одинаковые силы со стороны нижних шаров. Шары гладкие, поэтому сила

в точке касания направлена по нормали к поверхности, то есть вдоль линии центров, под углом θ к вертикали. Три горизонтальные составляющие по симметрии уравновешивают друг друга. Запишем условие равновесия верхнего шара в проекции на вертикаль (вверх — плюс):

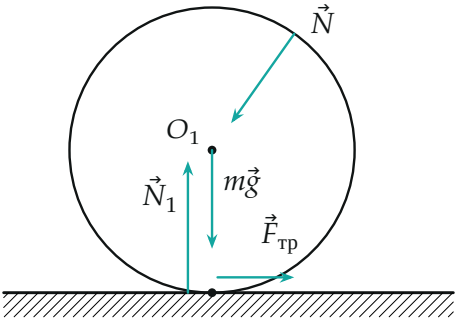
$$3N\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{3\cos\theta} = \frac{mg}{\sqrt{6}} \approx 0{,}41\,mg.$$

3. Силы, действующие на нижний шар. Верхний шар действует на нижний с силой N (третий закон Ньютона) вдоль линии центров вниз и наружу. Её составляющие:

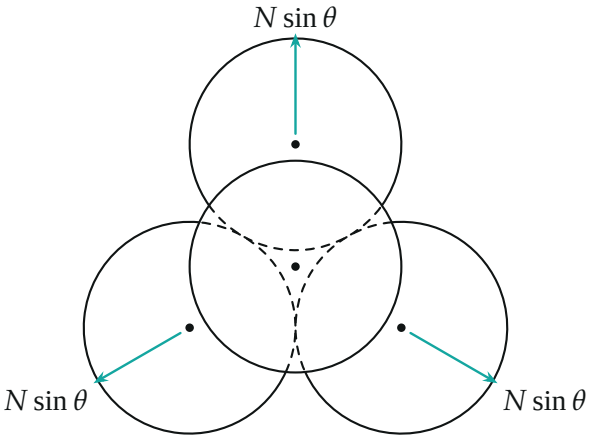
$$N\cos\theta = \frac{mg}{3} \qquad \text{(вниз)},$$

$$N\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{6}\,mg \approx 0{,}24\,mg \qquad \text{(от центра пирамиды)}.$$

Остальные силы: $m\vec{g}$ в центре шара; реакция пола $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, приложенные в точке P; силы от двух соседних нижних шаров — тоже вдоль линий центров, потому что касания гладкие. Соседи могут только отталкивать, но не притягивать, поэтому их суммарная сила направлена наружу, как и $N\sin\theta$; обозначим её величину $Q \geq 0$. Проекция на вертикаль даёт реакцию пола: $N_1 = mg + N\cos\theta = \dfrac{4}{3}\,mg$.



Силы на нижний шар. Линии действия $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и $\vec{N}_1$ проходят через центр O_1 (сила $\vec{N}_1$ слегка сдвинута влево от оси ради наглядности), только сила трения $\vec{F}_{тр}$ имеет плечо R.



Вид сверху: горизонтальная составляющая силы от верхнего шара у каждого нижнего направлена наружу, от центра пирамиды. Точки — центры нижних шаров.

4. Условие равновесия сил: что требуется от трения. Горизонтальная проекция сил на нижний шар (ось — от центра пирамиды наружу): чтобы центр шара не уезжал, трение должно быть направлено внутрь и равно

$$F_{\text{тр}} = N\sin\theta + Q \;\geq\; \frac{\sqrt{2}}{6}\,mg.$$

Трение не даёт шару проскальзывать, пока $F_{\text{тр}} \leq \mu N_1 = \dfrac{4}{3}\,\mu mg$. При $Q = 0$ это даёт $\mu \geq \dfrac{\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}18$. Но это только половина статики: для сил равновесие возможно, остаётся проверить моменты.

5. Условие моментов относительно центра шара. Ось выберем через центр O_1: тогда не дадут момента все силы, линии действия которых проходят через O_1. Таковы $m\vec{g}$, сила $\vec{N}$ верхнего шара, силы соседей и реакция $\vec{N}_1$: нормаль к сфере всегда идёт к её центру, а касания гладкие. Единственная сила с ненулевым плечом — сила трения: она приложена в точке P и направлена по касательной к шару, плечо равно R, момент $F_{\text{тр}}R$. Шар не раскручивается, если сумма моментов равна нулю:

$$F_{\text{тр}}R = 0 \quad\Rightarrow\quad F_{\text{тр}} = 0.$$

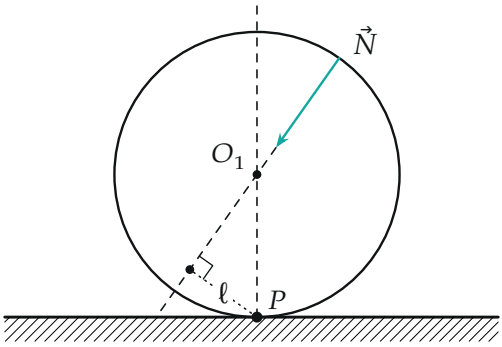
Но по шагу 4 трение должно быть не меньше $\frac{\sqrt{2}}{6}mg$. Условия противоречат друг другу, значит, равновесия нет при любом μ.

Обратите внимание: сила трения удерживает центр шара от смещения и сама же закручивает шар вокруг центра. Поэтому ответ $\mu \geq \sqrt{2}/8$, который получается из одних сил (шаг 4), неверен: для бруска моментов относительно центра нет, для шара есть.

6. Второй способ: моменты относительно точки касания. Возьмём ось через точку P. Сила тяжести, реакция $\vec{N}_1$ и сила трения проходят через P, их плечи равны нулю. Сила $\vec{N}$ идёт вдоль линии центров, и её плечо относительно P равно расстоянию от P до этой линии:

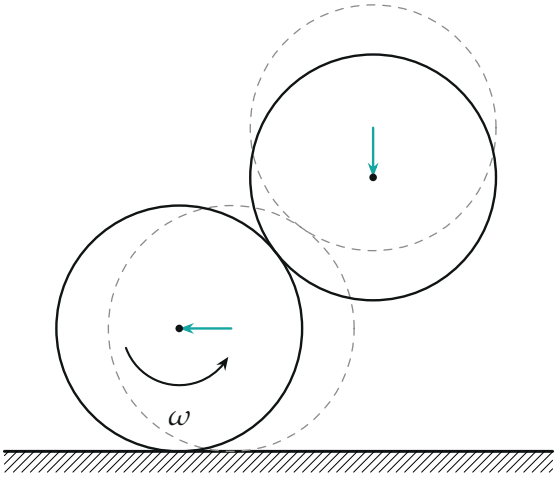
$$\ell = R\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{3}} \neq 0.$$

Момент силы $\vec{N}$ равен $N\ell = N\sin\theta \cdot R$ (против часовой стрелки на рисунке), и момент сил со стороны соседей направлен так же ($Q \geq 0$; их линии идут через центр, плечо относительно P равно R). Других моментов нет, поэтому сумма моментов относительно P равна $N\ell + QR > 0$. Если бы шар покоился, сумма моментов относительно любой точки равнялась бы нулю, в том числе и относительно P. Она не равна нулю, значит, равновесия нет. Вывод тот же, что в шаге 5.



Плечо ℓ силы $\vec{N}$ относительно точки P — перпендикуляр из P на линию действия силы. Силы $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{F}_{тр}$ проходят через P.

7. Что произойдёт. Нижние шары покатятся наружу, верхний шар будет опускаться между ними, пока не окажется на полу. Это происходит при любом коэффициенте трения: чем больше μ, тем меньше проскальзывание, но качение остаётся.



Раскатывание: штриховые контуры — начальное положение, сплошные — шар немного сместился наружу и покатился (направление вращения показано дугой), верхний шар опустился.

Проверка. Размерность: $N \sim mg$, $\ell \sim R$, моменты $\sim mgR$. Согласованность: $3N\cos\theta = 3\cdot\dfrac{mg}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{2}{3}} = mg$. Моменты относительно центра шара и относительно точки касания дают один и тот же вывод. Предельный случай $\mu \to \infty$: шар не скользит по полу, но свободно катится — вывод сохраняется.

Физический смысл. Чтобы удержать «пирамиду», трение должно и держать центр шара, и не закручивать его, а сила, приложенная к нижней точке шара, всегда закручивает. В реальности пирамиду удерживают деформации и трение качения, которыми мы пренебрегли.

Ответ. Ни при каком: шары раскатятся при любом, сколь угодно большом коэффициенте трения (равновесия нет).