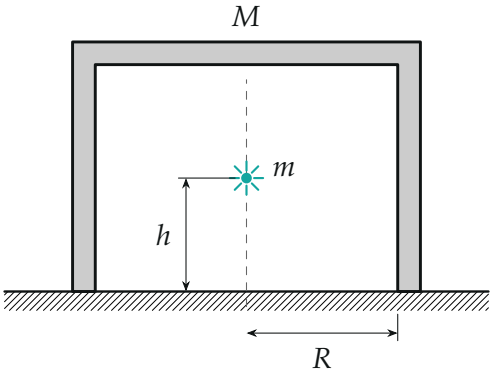
Взрыв заряда в колоколе

Задача 6. [ИОШ 2019/20, 9 класс, задача 6] Инженеры-взрывотехники проводят испытание новых видов взрывчатки в открытом снизу толстостенном цилиндрическом «колоколе» массой M и радиусом R, стоящем на земле. Внутри колокола на его оси на высоте h от поверхности земли взрывается заряд массой m. Заряд разрывается на множество мелких осколков, разлетающихся с одинаковыми скоростями равномерно во все стороны. Считая, что все осколки либо уходят в землю, либо застревают в стенках колокола, что масса колокола много больше массы осколков, и что все осколки долетают до колокола практически одновременно, найти высоту, на которую он подпрыгнет над землёй. Суммарная кинетическая энергия осколков E.



Поясняющий рисунок: разрез колокола, заряд на оси на высоте h.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон сохранения импульса. Осколки разлетаются равномерно во все стороны, поэтому их суммарный импульс равен нулю, как и импульс заряда до взрыва. Если бы колокол окружал заряд со всех сторон, все осколки застряли бы в нём, и колокол получил бы нулевой импульс — остался бы на месте. Но снизу колокол открыт: осколки, летящие вниз, уходят в землю и уносят импульс, направленный вниз. Тогда осколки, застрявшие в колоколе, передают ему такой же по модулю импульс, направленный вверх. Главная работа — найти импульс осколков, ушедших в землю.

Обозначения. $N \gg 1$ — число осколков, $m_1 = m/N$ — масса осколка, v — скорость осколка; θ_0 — угол между осью и направлением из точки взрыва на край основания колокола ($\operatorname{tg}\theta_0 = R/h$); P — импульс осколков, ушедших в землю; V — скорость колокола сразу после взрыва; H — высота подъёма колокола. Ось y направлена вверх.

1. Скорость осколка. Все осколки летят с одной скоростью v, поэтому суммарная кинетическая энергия

$$E = N\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \qquad mv = \sqrt{2mE}.$$

Величина $mv = \sqrt{2mE}$ — это сумма модулей импульсов всех осколков; она понадобится дальше.

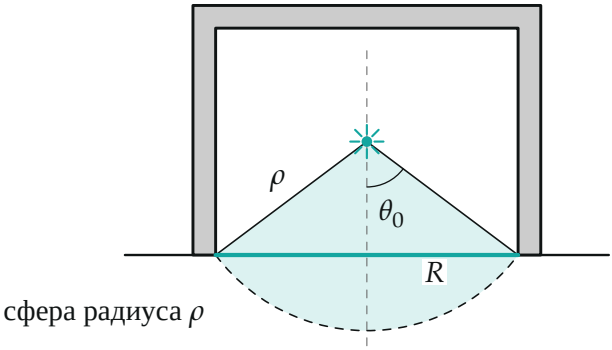
2. Закон сохранения импульса системы «заряд + колокол». Взрыв и полёт осколков длятся очень короткое время, поэтому импульсом, который за это время успевают дать сила тяжести и сила реакции земли, пренебрегаем. До взрыва импульс системы ноль. Осколки делятся на две группы: застрявшие в колоколе и ушедшие в землю, их суммарный импульс ноль:

$$\vec{p}_{\text{колок}} + \vec{p}_{\text{земля}} = 0.$$

Застрявшие осколки отдают весь свой импульс колоколу, значит, колокол получает импульс $\vec{p}_{\text{колок}} = -\vec{p}_{\text{земля}}$. По симметрии относительно оси горизонтальные составляющие импульсов осколков, ушедших в землю, взаимно уничтожаются, остаётся вертикальная составляющая P, направленная вниз. Колокол получает импульс P, направленный вверх.

3. Какие осколки уходят в землю. Колокол открыт снизу кругом радиуса R. В землю уходят осколки, летящие внутри конуса с вершиной в точке взрыва, опирающегося на этот круг. Угол раствора конуса $2\theta_0$, где

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{R}{h}, \qquad \sin\theta_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

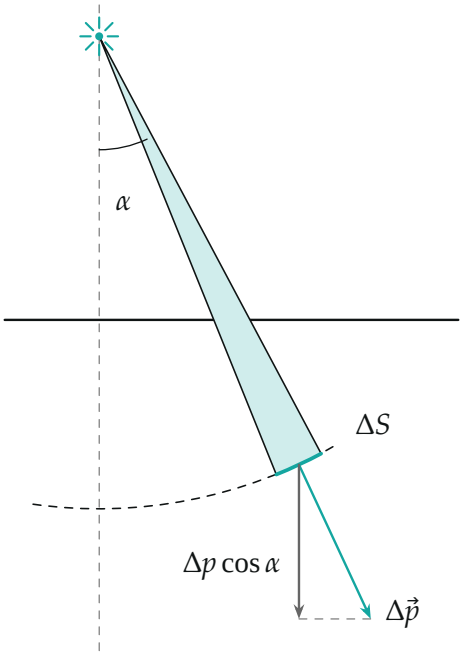


В землю уходят осколки внутри конуса с полууглом θ_0 (закрашен). Пунктир — кусок сферы радиуса $\rho = \sqrt{R^2 + h^2}$ с центром в точке взрыва: он проходит через край основания, и его проекция на землю — круг радиуса R (бирюзовый отрезок).

4. Импульс узкого пучка осколков. Окружим точку взрыва мысленной сферой радиуса $\rho = \sqrt{R^2 + h^2}$: она проходит как раз через край основания колокола. Осколки разлетаются равномерно, поэтому через площадку ΔS этой сферы проходит доля осколков $\Delta S/(4\pi\rho^2)$. Импульс этих осколков (модули складываются, потому что пучок узкий и все летят в одну сторону)

$$\Delta p = \frac{\Delta S}{4\pi\rho^2} N m_1 v = \frac{\Delta S}{4\pi\rho^2}\sqrt{2mE}.$$

Пучок идёт под углом α к вертикали, и вертикальная проекция его импульса равна $\Delta p \cos\alpha$.



Узкий пучок осколков под углом α к вертикали: он проходит через площадку ΔS на сфере радиуса ρ, его импульс $\Delta\vec{p}$ направлен по пучку, вертикальная проекция — $\Delta p \cos\alpha$.

5. Сумма по всем пучкам. Импульс осколков, ушедших в землю,

$$P = \sum \Delta p \cos\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{4\pi\rho^2} \sum \Delta S \cos\alpha.$$

Площадка ΔS перпендикулярна своему пучку, то есть наклонена к горизонтали на угол α, поэтому $\Delta S \cos\alpha$ — площадь её проекции на землю. Все площадки вместе составляют кусок сферы внутри конуса, а его проекция на землю — круг радиуса R (рисунок к пункту 3). Значит,

$$\sum \Delta S \cos\alpha = \pi R^2, \qquad P = \frac{\pi R^2}{4\pi\rho^2}\sqrt{2mE} = \frac{R^2\sqrt{2mE}}{4\left(R^2+h^2\right)}.$$

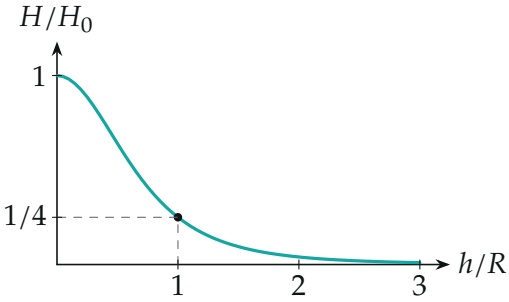
6. Скорость и высота подъёма колокола. Колокол получает им-

пульс P вверх; массой застрявших осколков пренебрегаем ($m \ll M$):

$$V = \frac{P}{M} = \frac{R^2\sqrt{2mE}}{4M\left(R^2+h^2\right)}.$$

Дальше колокол летит вверх с ускорением g. Закон сохранения механической энергии колокола при подъёме: $MV^2/2 = MgH$, откуда

$$H = \frac{V^2}{2g} = \frac{mER^4}{16\,g\,M^2\left(R^2+h^2\right)^2}.$$



Высота подъёма колокола в зависимости от высоты заряда: $H/H_0 = 1/\left(1+h^2/R^2\right)^2$, где $H_0 = mE/(16\,gM^2)$ — высота при заряде у самой земли. При $h = R$ колокол подпрыгнет в 4 раза ниже.

Обратите внимание. Колокол толкают не осколки, ушедшие в землю, а застрявшие в стенках и в крыше; но считать их импульс напрямую сложно, а по закону сохранения импульса он равен (с обратным знаком) импульсу осколков, ушедших в землю, — его найти проще. Энергия E колоколу почти не достаётся: при застревании осколков удар неупругий, и закон сохранения энергии для взрыва писать нельзя — только импульс.

Ответ «матрёшкой»:

$$H = \frac{V^2}{2g}, \qquad V = \frac{P}{M}, \qquad P = \frac{R^2}{4\left(R^2+h^2\right)}\sqrt{2mE},$$

$$H = \frac{mER^4}{16\,g\,M^2\left(R^2+h^2\right)^2}.$$

Проверка. Размерность:

$$\frac{[m][E]}{[g][M]^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}}{\text{м/с}^2\cdot\text{кг}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2} = \text{м},$$

множитель $R^4/(R^2+h^2)^2$ безразмерен. Предел $h \to 0$: в землю уходит ровно половина осколков, средняя проекция их импульса на вертикаль — половина модуля, и $P = \sqrt{2mE}/4$, что и даёт формула. Предел $h \gg R$: отверстие видно под маленьким углом, в землю почти ничего не уходит, $H \to 0$. Численная проверка: 4 миллиона случайных равномерно распределённых направлений для $h = R$ дали $P/\sqrt{2mE} = 0{,}1251$ при формуле $1/8 = 0{,}125$.

Смысл: колокол подбрасывает «недостача» осколков снизу — импульс уходящих в землю осколков; чем ниже заряд, тем шире это отверстие видно из точки взрыва и тем выше прыжок.

Ответ. $H = \dfrac{mER^4}{16\,g\,M^2\left(R^2+h^2\right)^2}.$