Три сосуда с двумя жидкостями

Задача 1. [ИОШ 2020/21, 10 класс, задача 1] Три одинаковых сосуда полностью заполнены тремя жидкостями. В одном из них содержится масса m жидкости 1, во втором — масса $1{,}8m$ жидкости 2, а в третьем — масса $1{,}6m$ смеси жидкостей 1 и 2. Найти массу жидкости 1 во всех трёх сосудах.



Поясняющий рисунок к условию: три одинаковых сосуда объёма V, полностью заполненные.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сосуды одинаковые и полные, поэтому в каждом из них жидкость занимает один и тот же объём V. Масса m жидкости 1 в первом сосуде и масса $1{,}8m$ жидкости 2 во втором сразу дают плотности чистых жидкостей: жидкость 2 тяжелее жидкости 1 в 1,8 раза. Смесь в третьем сосуде весит $1{,}6m$ — между m и $1{,}8m$, значит, жидкости 2 в ней по объёму больше. Главная идея — записать для третьего сосуда два баланса: по массе и по объёму. Считаем, что при смешивании объёмы складываются (иначе из условия ответ не найти): объём смеси равен сумме объёмов её компонентов.

Обозначения. ρ_1, ρ_2 — плотности жидкостей; m_1, m_2 — массы жидкостей 1 и 2 в третьем сосуде; V_1, V_2 — объёмы, которые они там занимают; M_1 — искомая масса жидкости 1 во всех трёх сосудах.

1. Плотности чистых жидкостей. Первый сосуд целиком занят жидкостью 1, второй — жидкостью 2, объём каждого V, поэтому

$$\rho_1 = \frac{m}{V}, \qquad \rho_2 = \frac{1{,}8\,m}{V}.$$

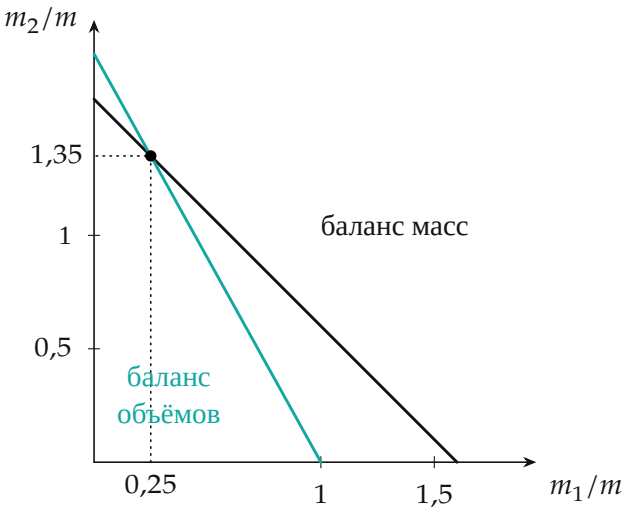
2. Два баланса для третьего сосуда. Масса смеси складывается из масс компонентов, а объём — из их объёмов:

$$m_1 + m_2 = 1{,}6\,m, \qquad V_1 + V_2 = V.$$

Объём каждого компонента — его масса, делённая на плотность: $V_1 = m_1/\rho_1 = m_1 V/m$ и $V_2 = m_2/\rho_2 = m_2 V/(1{,}8\,m)$. Подставим в баланс объёмов и сократим на V. Чтобы не тащить m в каждую формулу, измерим массы в единицах m: $x = m_1/m$, $y = m_2/m$. Получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 1{,}6, \\ x + \dfrac{y}{1{,}8} = 1. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 1,8: $1{,}8x + y = 1{,}8$. Каждое из двух уравнений — прямая на плоскости (x, y), а искомое решение — точка их пересечения.



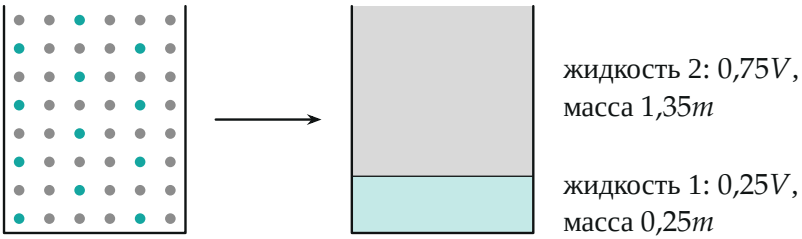
Два уравнения системы — прямые на плоскости долей масс $x = m_1/m$, $y = m_2/m$; решение — точка $(0{,}25;\ 1{,}35)$.

3. Решение системы. Из первого уравнения $y = 1{,}6 - x$. Подставляем во второе, записанное как $1{,}8x + y = 1{,}8$:

$$1{,}8x + 1{,}6 - x = 1{,}8 \;\Rightarrow\; 0{,}8x = 0{,}2 \;\Rightarrow\; x = 0{,}25, \qquad y = 1{,}6 - 0{,}25 = 1{,}35.$$

Значит, в третьем сосуде $m_1 = 0{,}25\,m$ жидкости 1 и $m_2 = 1{,}35\,m$ жидкости 2.

4. Что это за смесь. Объёмы компонентов: $V_1 = 0{,}25\,V$ и $V_2 = 1{,}35\,V/1{,}8 = 0{,}75\,V$. Мысленно разделим смесь на два слоя: четверть объёма занимает жидкость 1, три четверти — жидкость 2.



Смесь в третьем сосуде: одна четверть объёма — жидкость 1, три четверти — жидкость 2 (слои нарисованы для наглядности).

5. Масса жидкости 1 во всех сосудах. Жидкость 1 лежит в первом сосуде (масса m) и в третьем (масса $m_1 = 0{,}25\,m$):

$$M_1 = m + m_1 = m + 0{,}25\,m = 1{,}25\,m.$$

Попутно жидкости 2 во втором и третьем сосудах $M_2 = 1{,}8m + 1{,}35m = 3{,}15m$.

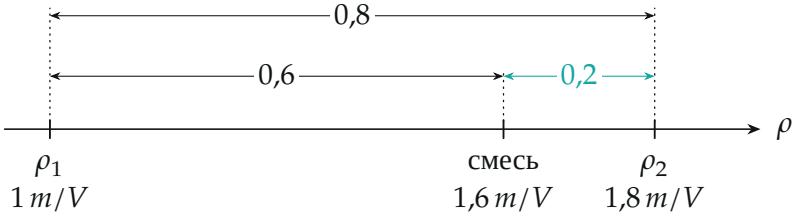


Бирюзовым закрашена жидкость 1; под сосудами — её масса. Сумма $m + 0 + 0{,}25m = 1{,}25m$.

Второй способ: правило смеси по плотностям. Плотность смеси в третьем сосуде $\rho = 1{,}6m/V$. Если доля объёма жидкости 1 равна φ, то плотность смеси — средневзвешенная по объёму: $\rho = \varphi\rho_1 + (1-\varphi)\rho_2$. В единицах m/V:

$$1{,}6 = \varphi \cdot 1 + (1-\varphi)\cdot 1{,}8 \;\Rightarrow\; 0{,}8\varphi = 0{,}2 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{1}{4}.$$

Поэтому $V_1 = V/4$ и $m_1 = \rho_1 V_1 = m/4$, как и раньше. На числовой оси плотностей это правило рычага: доля жидкости 1 относится к доле жидкости 2 как расстояние от смеси до ρ_2 к расстоянию от ρ_1 до смеси, то есть $0{,}2 : 0{,}6 = 1 : 3$.



Ось плотностей в единицах m/V*: смесь делит отрезок от* ρ_1 *до* ρ_2 *в отношении* $0{,}6 : 0{,}2 = 3 : 1$*; доля жидкости 1 равна* $0{,}2/0{,}8 = 1/4$.

Обратите внимание: спрашивают массу жидкости 1 *во всех трёх* сосудах, а не только в третьем; частый промах — ответить $0{,}25\,m$. И второй: без допущения, что объёмы при смешивании складываются, второго уравнения нет и задача не решается.

Проверка. Размерность: все величины — массы, $M_1 \sim m$. Сохранение массы: $M_1 + M_2 = 1{,}25m + 3{,}15m = 4{,}4m = m + 1{,}8m + 1{,}6m$. Сохранение объёма в третьем сосуде: $0{,}25V + 0{,}75V = V$. Предельные случаи: если масса смеси равна m, то в ней только жидкость 1 и $M_1 = 2m$; если $1{,}8m$ — только жидкость 2 и $M_1 = m$; наше $1{,}6m$ лежит ближе к жидкости 2, и $M_1 = 1{,}25m$ ближе к m.

Физический смысл. Масса смеси при полном сосуде однозначно говорит о её составе: чем она ближе к массе чистой жидкости 2, тем мень-

ше доля жидкости 1.

Ответ. $M_1 = 1{,}25\,m$ (из них m — в первом сосуде и $0{,}25\,m$ — в третьем).