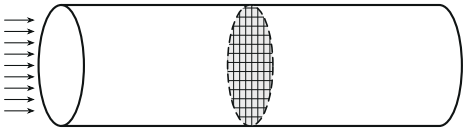
Шарики пролетают сквозь сетку

Задача 2. [ИОШ 2020/21, 10 класс, задача 2] Вдоль оси трубы движется поток шариков радиуса $2a$. В трубе перпендикулярно её оси расположена сетка из тонкой проволоки с размером ячейки $8a \times 12a$. Какая доля падающего потока пролетит сквозь трубу? Считать, что пролетают только те шарики, которые не касаются проволок; все шарики, которые коснулись проволок любой своей точкой, задерживаются. Радиус трубы много больше размеров ячейки сетки.



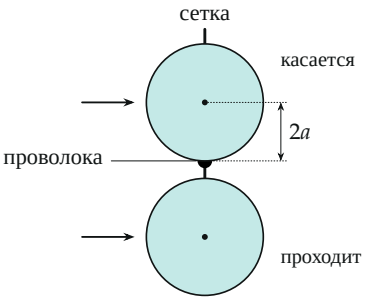
▲ **Решение. Что происходит.** Шарики летят вдоль оси трубы и равномерно распределены по её сечению. Пролетает ли шарик, зависит только от того, куда в плоскости сетки попадает его *центр*: шарик не заденет проволоку, если центр проходит от каждой проволоки дальше радиуса $2a$. Поэтому доля пролетевших — это отношение площади «разрешённой» области для центра к площади ячейки. Это задача на вероятность через отношение площадей (как в задаче о бросании монеты на паркет).

Обозначения. Плоскость сетки — плоскость рисунков; ячейка — прямоугольник $12a \times 8a$; $r = 2a$ — радиус шарика; $S_{\text{я}}$ — площадь ячейки; $S_{\text{пр}}$ — площадь области, куда может попасть центр пролетающего шарика; η — доля пролетевших.

1. Почему можно считать ячейки одинаковыми. У стенки трубы ячейки обрезаны, но радиус трубы много больше ячейки: число таких «краевых» ячеек растёт как длина окружности ($\propto R$), а число целых ячеек — как площадь сечения ($\propto R^2$). Их доля мала, и можно считать все ячейки прямоугольными $8a \times 12a$, а распределение шариков по каждой ячейке — одинаковым.

2. Когда шарик касается проволоки. Проволока тонкая и лежит в плоскости сетки, перпендикулярной скорости. Шарик, пролетая через

сетку, проходит своим центром через эту плоскость; в этот момент ближайшая к проволоке точка шарика находится от неё на расстоянии $d - r$, где d — расстояние от центра до проволоки. Шарик заденет проволоку, если $d \le r = 2a$.

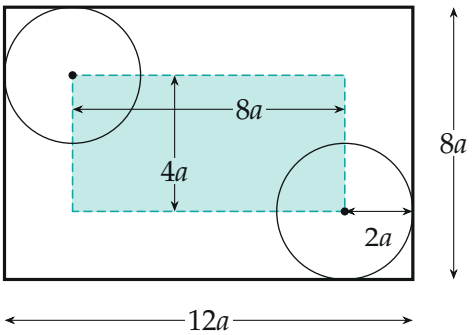


Вид сбоку на сетку в момент пролёта: шарик, центр которого ближе $2a$ к проволоке, касается её (верхний); дальше $2a$ — проходит (нижний).

3. Разрешённая область для центра. Внутри ячейки центр должен отстоять от каждой из четырёх сторон больше чем на $2a$. Это прямоугольник со сторонами

$$12a - 2 \cdot 2a = 8a, \qquad 8a - 2 \cdot 2a = 4a, \qquad S_{\text{пр}} = 8a \cdot 4a = 32a^2,$$

а площадь ячейки $S_{\text{я}} = 12a \cdot 8a = 96a^2$.

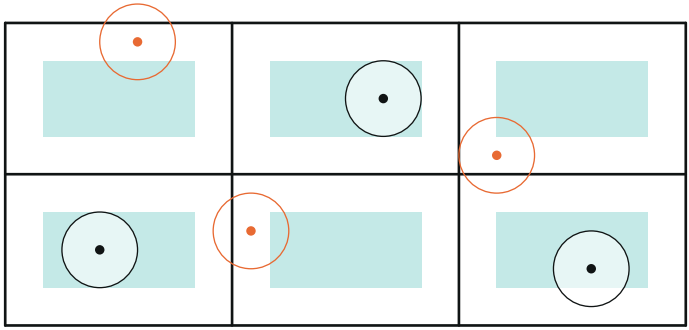


Ячейка сетки (вид вдоль трубы). Центр пролетающего шарика должен попасть в закрашенный прямоугольник $8a \times 4a$; шарики с центром на его границе как раз касаются проволок (нарисованы два таких).

4. Доля пролетевших. Центры шариков распределены по сечению равномерно, поэтому доля прошедших через ячейку равна отношению площадей:

$$\eta = \frac{S_{\text{пр}}}{S_{\text{я}}} = \frac{(12a - 4a)(8a - 4a)}{12a \cdot 8a} = \frac{32a^2}{96a^2} = \frac{1}{3}.$$

Так в каждой ячейке, значит, и во всей трубе.



Фрагмент сетки: центры чёрных шариков в закрашенных областях — пролетают, у красных центр вне их — шарик задевает проволоку.

Обратите внимание: отступ $2a$ берётся от *каждой* стороны, поэтому стороны уменьшаются на $4a$, а не на $2a$. И ответ не равен доле «просвета» сетки (она для тонкой проволоки почти 1): мешают не проволоки, а размер шарика.

Проверка. Доля безразмерна. Предел: если шарики точечные ($r \to 0$), $\eta \to 1$ — через тонкую сетку проходит всё. Если диаметр шарика равен меньшей стороне ячейки ($r = 4a$), разрешённый прямоугольник вырождается ($8a - 8a = 0$), $\eta = 0$. Общая формула $\eta = \frac{(12a-2r)(8a-2r)}{96a^2}$ при $r = 2a$ даёт $1/3$.

Смысл. Сетка с ячейкой всего в 2–3 диаметра шарика задерживает две трети потока, хотя сама почти ничего не загораживает.

Ответ. Пролетит одна треть падающего потока: $\eta = \frac{8a \cdot 4a}{12a \cdot 8a} = \frac{1}{3}$.