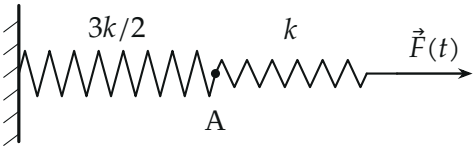
Две пружины и постоянная скорость конца

Задача 3. [ИОШ 2020/21, 10 класс, задача 3] Две пружины с коэффициентами жёсткости $\frac{3k}{2}$ и k соединены «последовательно». Один конец комбинированной пружины прикреплён к стене, ко второму прикладывают зависящую от времени силу так, что этот конец движется с постоянной скоростью v (см. рисунок). Найти скорость точки соединения пружин (точка A на рисунке) и внешнюю силу $F(t)$ как функцию времени, обеспечивающую данное движение пружин. Массой пружин пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Конец пружины тянут равномерно, и пружина растягивается всё сильнее; сила растёт. Пружины невесомые, поэтому в каждый момент на любой их кусок действуют уравновешенные силы: сила натяжения одинакова по всей длине и равна внешней силе. Это задача на последовательное соединение пружин: общая сила — одна, удлинения складываются, и удлинение каждой пружины обратно пропорционально её жёсткости.

Обозначения. $k_1 = \frac{3}{2}k$ — жёсткость пружины у стены, $k_2 = k$ — второй; $x(t)$ — перемещение свободного конца, $x_\text{A}(t)$ — перемещение точки A (отсчёт от положения, где пружины не деформированы; считаем, что в начальный момент $t = 0$ пружины не растянуты); F_1, F_2 — силы упругости пружин; ось x — от стены вдоль пружин.

1. Силы во всей цепочке одинаковы. Второй закон Ньютона для точки A (масса нулевая): $0 \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, значит, в проекции на ось x силы упругости пружин равны по величине: $F_1 = F_2$. То же для свободного конца: внешняя сила уравновешивает силу упругости второй пружины, $F = F_2$. Итак,

$$F = F_1 = F_2.$$



Силы на невесомую точку соединения и на невесомый конец пружины: в каждой паре силы равны, иначе невесомая точка получила бы бесконечное ускорение.

2. Удлинения и закон Гука. Пружина у стены растянута на x_A, вторая — на $x - x_\text{A}$:

$$F = k_1 x_\text{A}, \qquad F = k_2\,(x - x_\text{A}).$$

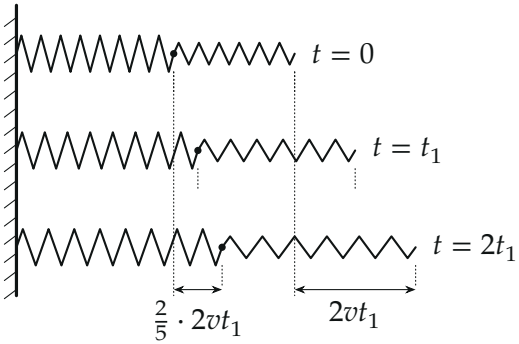
Удлинения обратно пропорциональны жёсткостям: $x_\text{A} : (x - x_\text{A}) = k_2 : k_1 = 2 : 3$.

3. Скорость точки A. Из двух уравнений пункта 2: $k_1 x_\text{A} = k_2 x - k_2 x_\text{A}$, откуда

$$x_\text{A} = \frac{k_2}{k_1 + k_2}\,x = \frac{k}{\frac{3}{2}k + k}\,x = \frac{2}{5}\,x = \frac{2}{5}\,vt.$$

Перемещение точки A пропорционально времени, значит, она тоже движется равномерно:

$$v_\text{A} = \frac{dx_\text{A}}{dt} = \frac{2}{5}\,v.$$



Пружина в моменты 0, t_1, $2t_1$ (по формулам решения): конец уходит на vt, точка A — на $\frac{2}{5}vt$; толстая пружина растягивается меньше.

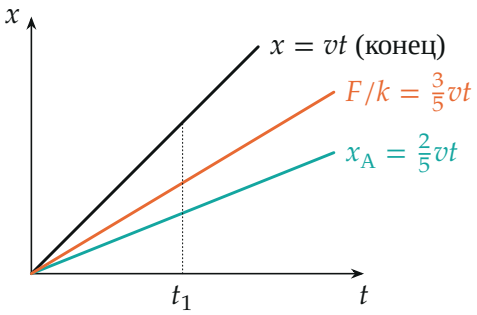
4. Внешняя сила. Подставим x_A в закон Гука для первой пружины:

$$F(t) = k_1 x_A = \frac{3}{2}k \cdot \frac{2}{5}vt = \frac{3}{5}kvt.$$

Тот же результат даёт жёсткость последовательного соединения k_o:

$$\frac{1}{k_o} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{3k} + \frac{1}{k} = \frac{5}{3k}, \qquad F = k_o x = \frac{3}{5}kvt.$$

Сила растёт линейно со временем.



Перемещения конца и точки A и сила (в единицах k) в зависимости от времени — прямые из начала координат.

Обратите внимание: жёсткая пружина при той же силе растягивается *меньше*, поэтому $v_A < v/2$.

Проверка. Размерности: $[kvt] = \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot \text{м} = \text{Н}$; v_A — скорость. Пределы: если бы первая пружина была бесконечно жёсткой ($k_1 \to \infty$), А стояла бы на месте, $v_A = \frac{k_2}{k_1+k_2}v \to 0$; если бы бесконечно жёсткой была вторая, А двигалась бы вместе с концом, $v_A \to v$. При равных жёсткостях $v_A = v/2$. Совпадение двух способов найти F (через первую пружину и через общую жёсткость) — тоже проверка.

Смысл. Невесомая цепочка пружин передаёт силу без изменения, а удлинение распределяется по пружинам обратно их жёсткостям.

Ответ. $v_A = \frac{2}{5}v$; $F(t) = \frac{3}{5}kvt$ (отсчёт времени от недеформированного состояния).