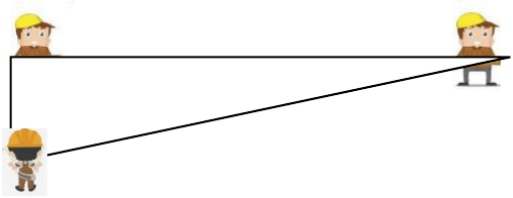
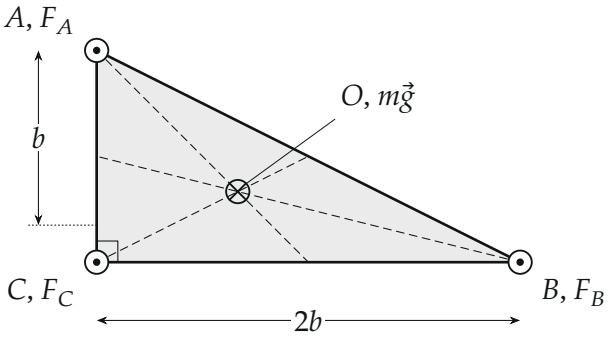
Плита-треугольник на плечах рабочих

Задача 4. [ИОШ 2020/21, 10 класс, задача 4] Трое рабочих несут на стройке массивную древесно-стружечную плиту массой $m = 60$ кг. Плита представляет собой прямоугольный треугольник с отношением катетов $2:1$ и располагается горизонтально. Каждый рабочий держит плиту за одну из вершин плиты. Какая доля веса плиты приходится на каждого из них?



▲ **Решение. Что происходит.** Плиту несут равномерно, она в покое относительно рабочих и горизонтальна — это задача статики твёрдого тела: сумма сил и сумма моментов сил равны нулю. На плиту действуют сила тяжести в центре тяжести и три вертикальные силы рук рабочих в вершинах. Главная идея — брать моменты относительно оси, проходящей через *двух* рабочих: тогда их силы не дают моментов, и в уравнении остаётся одна неизвестная.

Обозначения. Вершины плиты (вид сверху): C — вершина прямого угла, B — вершина меньшего острого угла (конец длинного катета), A — вершина большего острого угла (конец короткого катета); $CB = 2b$, $CA = b$. Силы рабочих F_C, F_B, F_A направлены вверх; O — центр тяжести плиты (точка пересечения медиан); D — проекция O на катет CA.



Плита, вид сверху. Кружок с точкой — сила, направленная к нам (вверх), с крестиком — от нас (вниз). Пунктир — медианы; они пересекаются в центре тяжести O.

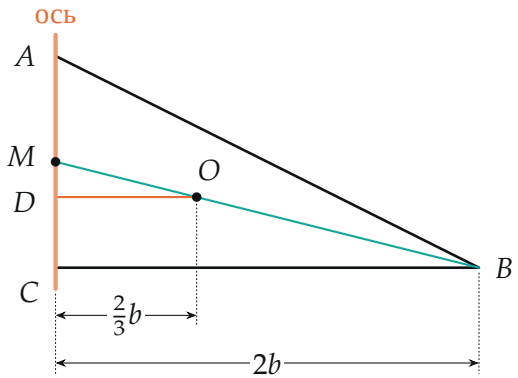
1. Условия равновесия. Силы вертикальны, поэтому второй закон Ньютона для плиты в проекции на вертикаль даёт

$$F_A + F_B + F_C = mg,$$

а равенство нулю суммы моментов сил выполняется относительно *любой* горизонтальной оси.

2. Где центр тяжести. Плита однородна, её центр тяжести — точка пересечения медиан O; она делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. Возьмём медиану из вершины B к середине M катета CA: $BO:OM=2:1$, то есть $OM=\frac{1}{3}BM$. Треугольники BCM и ODM подобны (у них общий угол при M и прямые углы при C и D), поэтому

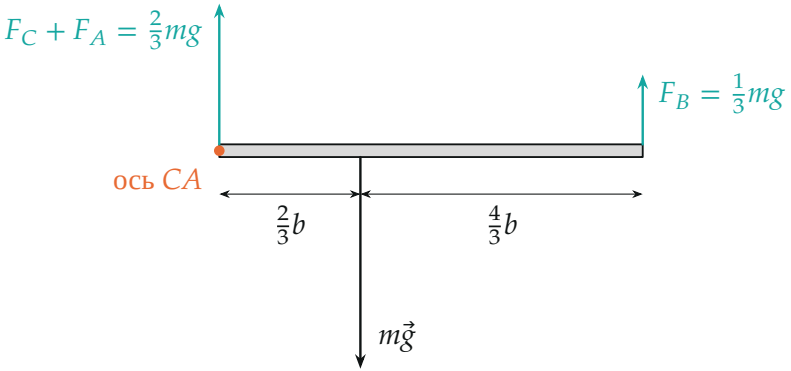
$$\frac{OD}{BC}=\frac{OM}{BM}=\frac{1}{3}, \qquad OD=\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}b.$$



Ось через катет CA (красная). Плечо силы F_B — катет $CB = 2b$, плечо силы тяжести — $OD = \frac{2}{3}b$ (втрое меньше, по подобию треугольников BCM и ODM).

3. Моменты относительно оси CA. Ось через катет CA проходит через рабочих в C и A — их силы моментов не дают, и это главная причина выбрать её. Плечо силы F_B — расстояние от B до оси, это катет $BC = 2b$; плечо силы тяжести — OD. Силы F_B и mg поворачивают плиту вокруг оси в разные стороны, поэтому

$$F_B \cdot BC = mg \cdot OD = mg \cdot \frac{1}{3} BC \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{1}{3} mg.$$



Вид вдоль катета CA (ось — красная точка). Силы в масштабе: F_B на плече $2b$ уравновешивает mg на плече $\frac{2}{3}b$.

4. Остальные рабочие. Повторим то же для оси через катет CB: моментов не дают F_C и F_B, плечо F_A — катет CA, плечо силы тяжести — расстояние от O до CB, тоже треть катета CA (та же медиана, теперь из A). Получаем $F_A = \frac{1}{3}mg$. Из уравнения сил

$$F_C = mg - F_A - F_B = \frac{1}{3}\,mg.$$

Каждый держит треть веса: $\frac{1}{3}mg = \frac{1}{3}\cdot 60 \cdot 9{,}8 \approx 196$ Н (около 20 кгс).

5. Второй способ: без счёта плеч. Центр тяжести треугольника — среднее арифметическое его вершин: $\vec{r}_O = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$. Если каждый рабочий держит $\frac{1}{3}mg$, то сумма сил равна mg, а суммарный момент трёх равных сил относительно любой оси такой же, как у силы mg, приложенной в их «среднем» — точке O. Значит, равные силы $\frac{1}{3}mg$ удовлетворяют обоим условиям равновесия. Решение единственное: три опоры не на одной прямой, три неизвестных — три уравнения (сила и два момента).

Обратите внимание: отношение катетов $2:1$ — лишнее данное. Ответ один и тот же для треугольной плиты любой формы, лишь бы она была однородной и рабочие держали её за вершины.

Проверка. Размерность: $[mg] = $ Н. Сумма $3 \cdot \frac{1}{3}mg = mg$ — уравнение сил выполнено. Предел: если сдвинуть рабочего из вершины B к C (держать за середину катета), его плечо уменьшится вдвое, и сила F_B вырастет до $\frac{2}{3}mg$ — поэтому за вершины держать выгоднее всего: нагрузка делится поровну.

Смысл. Центр тяжести треугольника — «средняя» точка вершин, поэтому вершины нагружены одинаково.

Ответ. На каждого рабочего приходится одинаковая доля — $\frac{1}{3}$ веса плиты, $\frac{1}{3}mg \approx 196$ Н.