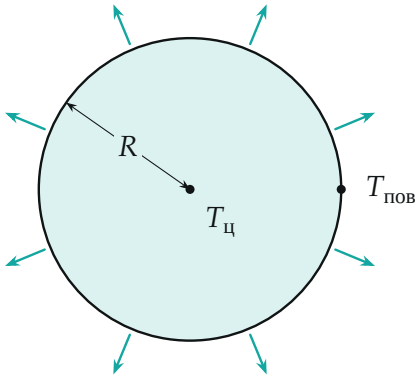
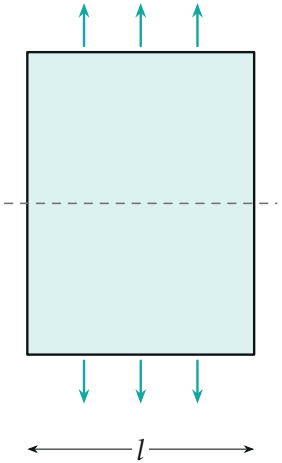
Остеклованное радиоактивное топливо

Задача 6. [ИОШ 2020/21, 10 класс, задача 6] Отработанное топливо атомных электростанций необходимо хранить, не допуская его попадания в воздух или грунтовые воды. Для этого топливо остекловывают, т. е. смешивают с расплавленным стеклом, которое благодаря химической инертности после застывания удерживает топливо в себе. Топливо остекловывают в виде цилиндров радиусом $R = 0{,}15$ м. За счёт остаточных радиоактивных превращений в топливе продолжается выделение тепла. Известно, что энерговыделение на единицу длины цилиндров составляет $q_l = 1$ кВт/м. Определить перепад температуры между центром цилиндра и его поверхностью. Теплопроводность стекла $\lambda = 3$ Вт/(м·К).

Указание. Количество тепла q, переносимого в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx, одна поверхность которого поддерживается при температуре t_1, вторая — при температуре t_2, определяется законом: $q = \lambda\,(t_2 - t_1)/\Delta x$, где λ — коэффициент теплопроводности (закон Фурье).



сечение цилиндра



вид сбоку: кусок длины l

Поясняющий рисунок к условию: сечение и вид сбоку цилиндра радиусом R.

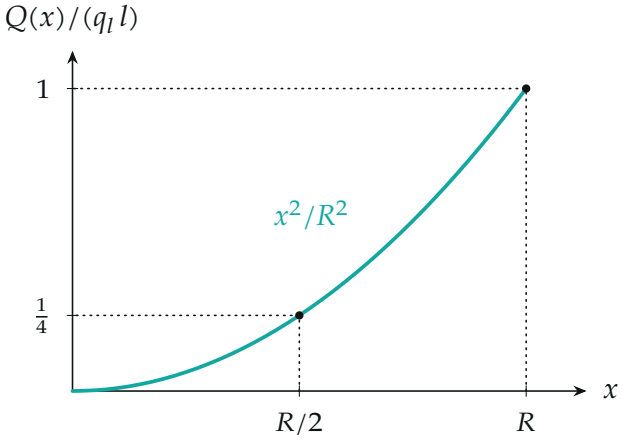
▲ **Решение. Что происходит.** Топливо перемешано со стеклом равномерно, поэтому считаем, что тепло выделяется равномерно по объёму

цилиндра (так решают и организаторы; в условии это прямо не сказано). Внутри цилиндра выделяется тепло, а температура уже установилась (не меняется со временем). Значит, всё тепло, выделенное внутри любого коаксиального цилиндра, целиком проходит через его боковую поверхность. Чтобы тепло шло от оси наружу, температура должна убывать с радиусом: центр горячее поверхности. По закону Фурье поток тем больше, чем больше перепад температуры на единицу толщины. Главная идея — мысленно выделить цилиндр радиуса x, найти из баланса тепла градиент температуры в тонком слое около его поверхности, а потом сложить перепады всех тонких слоёв от оси до поверхности. Это задача на тепловой баланс и суммирование по слоям.

Обозначения. x — расстояние от оси цилиндра; l — длина любого выбранного куска цилиндра (в ответ не войдёт); $Q(x)$ — мощность, выделяемая внутри цилиндра радиуса x и длины l; $T(x)$ — температура; $\Delta T = T(0) - T(R)$ — искомый перепад между центром и поверхностью.

1. Тепло, выделяемое внутри радиуса x. Выделение равномерно по объёму, поэтому мощность пропорциональна объёму. На длине l во всём цилиндре выделяется $q_l\, l$, объём внутреннего цилиндра составляет долю $\pi x^2 l/(\pi R^2 l) = x^2/R^2$ от объёма всего:

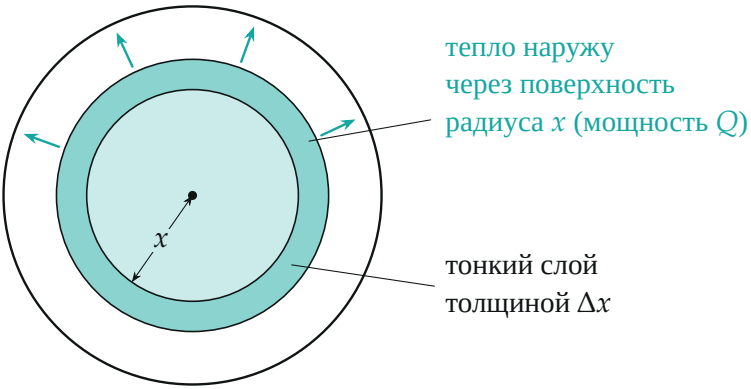
$$Q(x) = q_l\, l\, \frac{x^2}{R^2}.$$



Мощность, выделяемая внутри радиуса x, растёт как x^2: внутри половины радиуса выделяется четверть всего тепла.

2. Закон Фурье для тонкого слоя. В стационарном режиме мощность $Q(x)$ целиком уходит через боковую поверхность цилиндра радиуса x. Возьмём тонкий слой толщиной Δx вокруг этой поверхности. Его площадь $S = 2\pi x\,l$, и при малой толщине слоя можно считать, что $Q(x)$ проходит через него, а температура на его внутренней и внешней поверхностях отличается на $\Delta T_{\text{сл}}$ (внутри горячее). По закону Фурье, умноженному на площадь:

$$Q(x) = \lambda\, S\, \frac{\Delta T_{\text{сл}}}{\Delta x} = \lambda \cdot 2\pi x\, l\, \frac{\Delta T_{\text{сл}}}{\Delta x}.$$



Тонкий слой около поверхности цилиндра радиуса x: через него наружу уходит всё тепло, выделенное внутри. Подставим $Q(x)$ из пункта 1 и сократим l:

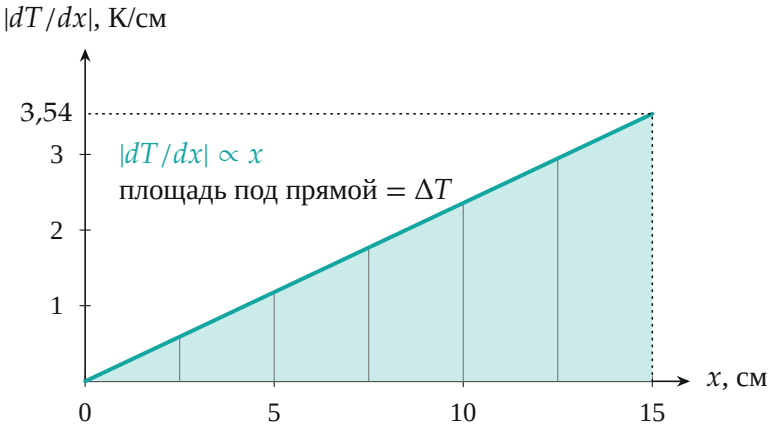
$$\Delta T_{\text{сл}} = \frac{Q(x)\,\Delta x}{2\pi\lambda x\, l} = \frac{q_l\, x\,\Delta x}{2\pi\lambda R^2}, \qquad \left|\frac{dT}{dx}\right| = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2}\, x.$$

Градиент температуры растёт линейно с расстоянием от оси: на самой оси он равен нулю (внутри нулевого радиуса тепло не выделяется), у поверхности — наибольший. Обратите внимание: формулой плоского слоя $\Delta T = Q\Delta x/(\lambda S)$ нельзя сразу пользоваться для всего радиуса R с одной площадью: площадь слоя $2\pi x l$ и поток $Q(x)$ меняются с радиусом, поэтому слои берутся тонкими.

3. Складываем перепады всех слоёв. Разобьём цилиндр на тонкие слои толщиной Δx_i на расстояниях x_i от оси. Перепад между осью и поверхностью — сумма перепадов всех слоёв (от оси до поверхности):

$$\Delta T = \sum_i \Delta T_{\text{сл},i} = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} \sum_i x_i\,\Delta x_i.$$

Сумма $\sum x_i \Delta x_i$ — это площадь под прямой $y = x$ от 0 до R, то есть площадь треугольника $R^2/2$ (так же вычисляют работу силы упругости). На графике градиента $|dT/dx|$ эта же сумма — площадь под прямой от оси до поверхности.



Градиент $|dT/dx|$ растёт линейно с x; площадь под прямой от 0 до R — перепад температуры ΔT. Пунктир — значение у поверхности 3,54 К/см. Подставляем $\sum x_i \Delta x_i = R^2/2$:

$$\Delta T = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{q_l}{4\pi\lambda}.$$

4. Число.

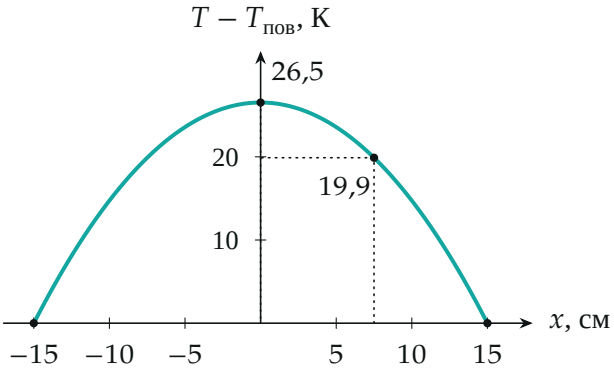
$$\Delta T = \frac{1000\ \text{Вт/м}}{4\pi \cdot 3\ \text{Вт/(м} \cdot \text{К)}} \approx 26{,}5\ \text{К}.$$

Центр цилиндра горячее поверхности примерно на 26,5 К. Обратите внимание: радиус R из ответа выпал — при той же мощности на единицу длины перепад не зависит от толщины цилиндра: у толстого цилиндра объёмное энерговыделение меньше ($\propto 1/R^2$), а путь тепла длиннее ($\propto R$), и эти эффекты компенсируют друг друга.

Распределение температуры. Если складывать перепады слоёв не до поверхности, а до радиуса x, получим профиль температуры:

$$T(x) - T_{\text{пов}} = \frac{q_l}{4\pi\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \quad \text{(парабола)}:$$

при $x = 0$ получаем ΔT, при $x = R$ — ноль.



Температура относительно поверхности: на оси 26,5 К, на расстоянии $R/2$ — 19,9 К, у поверхности — 0.

Второй способ: уравнение теплопроводности. Объёмная мощность $q_V = q_l/(\pi R^2)$. Поток тепла наружу через поверхность радиуса x равен $Q = -2\pi x\, l\, \lambda\, T'$ (производная $T' = dT/dx$ отрицательна), а от x до $x + dx$ он вырастает на мощность, выделенную в слое, $2\pi x\, l\, q_V\, dx$. Отсюда

$$\frac{d}{dx}(x\,T') = -\frac{q_V}{\lambda}\,x \;\Rightarrow\; x\,T' = -\frac{q_V}{2\lambda}\,x^2 \;\Rightarrow\; T(x) = T(0) - \frac{q_V}{4\lambda}\,x^2,$$

константа интегрирования равна нулю, потому что на оси градиент конечен. Тогда

$$\Delta T = \frac{q_V R^2}{4\lambda} = \frac{q_l}{4\pi\lambda},$$

как и в первом способе.

Проверка. Размерность: $[q_l/\lambda] = \dfrac{\text{Вт/м}}{\text{Вт/(м}\cdot\text{К)}} = \text{К}$. Предел $\lambda \to \infty$: стекло проводит идеально, $\Delta T \to 0$. Численная проверка: суммирование по 10^5 тонким слоям с $\Delta T_{\text{сл}} = q_l x\,\Delta x/(2\pi\lambda R^2)$ даёт 26,526 К, как и формула. Официальный ответ записан округлённо (около 26 °C), точное значение 26,5 К.

Физический смысл. Чем больше мощность на единицу длины и хуже проводит стекло, тем сильнее нагрет центр; радиус цилиндра на перепад не влияет.

Ответ. $T_{\text{центр}} - T_{\text{пов}} = \dfrac{q_l}{4\pi\lambda} \approx 26{,}5$ К (не зависит от радиуса цилиндра).