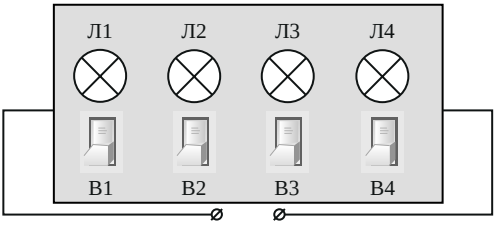
Чёрный ящик с четырьмя лампами

Задача 2. [ИОШ 2020/21, 11 класс, задача 2] Электрическое соединение четырёх одинаковых ламп Л1, Л2, Л3 и Л4 спрятано в чёрный ящик с двумя выводами. Известно, что каждый из выключателей В1, В2, В3 и В4 соединён последовательно с лампой Л1, Л2, Л3 и Л4 соответственно. Когда все выключатели включены, все лампы горят. Если отключить выключатель В1 (остальные включены), то суммарная мощность, выделяемая в цепи, составляет $P_1 = 90$ Вт, а если отключить выключатель В2 (остальные включены), то суммарная мощность, выделяемая в цепи, составляет $P_2 = 120$ Вт. Сопротивлением проводов пренебречь.



1. Предложите простейшую схему чёрного ящика.
2. Какая суммарная электрическая мощность выделяется в цепи, если все выключатели включены?

▲ **Решение. Что происходит.** Мощность лампы зависит от напряжения на ней: $P = u^2/R$. Выключатель убирает из схемы свою лампу, а вместе с ней и всё, что стоит с этой лампой в одной ветви последовательно. Поэтому два числа P_1 и P_2 позволяют «прощупать» ящик: сравнить, сколько мощности пропадает, когда убирают Л1 и когда убирают Л2. Это задача на чёрный ящик: схему подбирают перебором и проверяют по данным, а мощность считают через напряжения на лампах.

Обозначения. U — напряжение на выводах ящика; R — сопротивление одной лампы (одинаково у всех, от напряжения не зависит); $P_0 = U^2/R$ — мощность лампы при полном напряжении U; P — мощность при всех включённых выключателях.

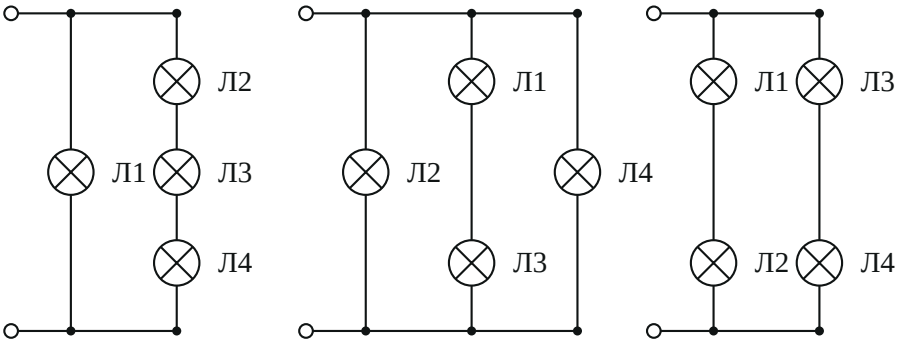
1. Мощность ветвей. Лампа под напряжением u выделяет

$$P = \frac{u^2}{R} = P_0 \left(\frac{u}{U}\right)^2.$$

Ветвь из двух одинаковых ламп, включённых последовательно, подключена к U: напряжение делится поровну, на каждой лампе $U/2$ и $P_0/4$, вся ветвь выделяет $P_0/2$. Ветвь из трёх ламп выделяет $P_0/3$ (на каждой $U/3$, по $P_0/9$). Ветви, подключённые к одним и тем же выводам, находятся под одним и тем же напряжением, а их мощности складываются.

2. Что следует из условия. Если отключить Л1 или Л2, остальные лампы продолжают гореть, значит, в схеме есть параллельные ветви: когда все лампы в одной цепочке, разрыв гасит всё. Если бы все четыре лампы были параллельны, отключение любой оставляло бы $3P_0$, и $P_1 = P_2$. Но $P_1 \neq P_2$, значит, схема смешанная, а Л1 и Л2 входят в неё неравноценно: переставим их местами — и мощности должны были бы поменяться.

3. Перебор схем. Проверим три естественные схемы (выключатели на рисунке не показаны: каждый стоит последовательно со своей лампой). Для каждой из условия P_2 найдём P_0 и проверим по P_1.



Схемы, не подходящие к условию.

а) Л1 параллельна цепочке Л2–Л3–Л4. Отключение В2 гасит всю цепочку, остаётся Л1: $P_2 = P_0 = 120$ Вт. Тогда при отключённой Л1

цепочка из трёх ламп выделяет $P_1 = P_0/3 = 40$ Вт, а нужно 90 Вт. Не подходит.

б) Л2 и Л4 в отдельных ветвях, а Л1 и Л3 — цепочкой. Отключение В2 оставляет цепочку Л1–Л3 и Л4: $P_2 = P_0/2 + P_0 = 1{,}5P_0 = 120$ Вт, $P_0 = 80$ Вт. При отключённой Л1 гаснет цепочка, горят Л2 и Л4: $P_1 = 2P_0 = 160$ Вт, а нужно 90 Вт. Не подходит.

в) Две цепочки Л1–Л2 и Л3–Л4 параллельно. Л1 и Л2 равноценны: при отключении любой из них остаётся одна цепочка, $P_1 = P_2 = P_0/2$. Не подходит.

4. Схема, которая подходит. Л1 и Л3 — в отдельных ветвях, Л2 и Л4 — цепочкой в третьей ветви.

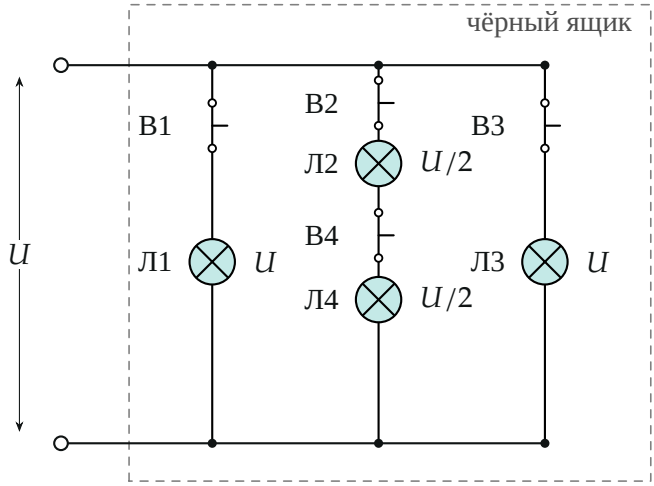
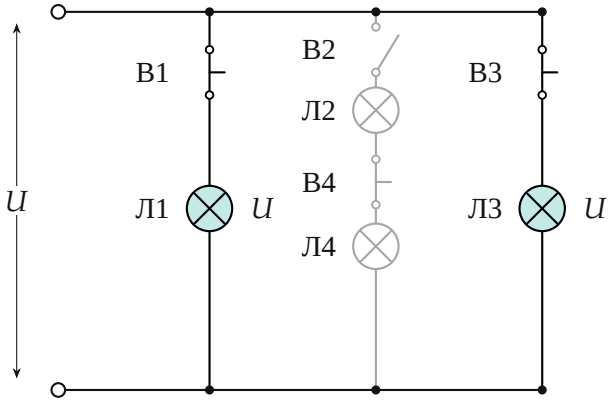


Схема ящика (три параллельные ветви). Бирюзой закрашены горящие лампы; рядом с лампой — напряжение на ней.

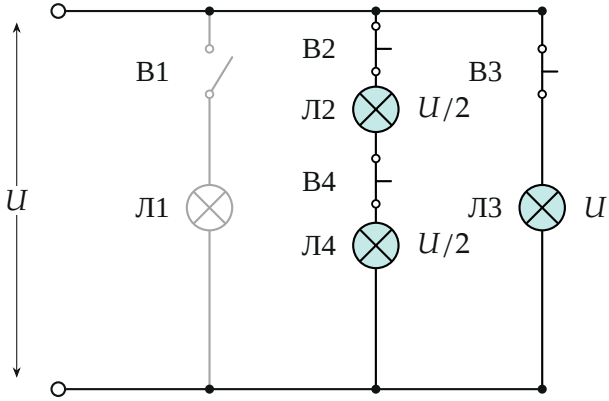
Проверим её. Отключён В2 (остальные включены): цепочка Л2–Л4 разорвана, горят Л1 и Л3, обе под полным напряжением.



Отключён B2: горят Л1 и Л3, обе под напряжением U; ветвь с Л2 и Л4 обесточена (серая).

$$P_2 = 2P_0 = 120\ \text{Вт} \ \Rightarrow \ P_0 = 60\ \text{Вт}.$$

Отключён B1: Л1 не горит, Л3 под полным напряжением (P_0), а цепочка Л2–Л4 замкнута, и на каждой её лампе по $U/2$.



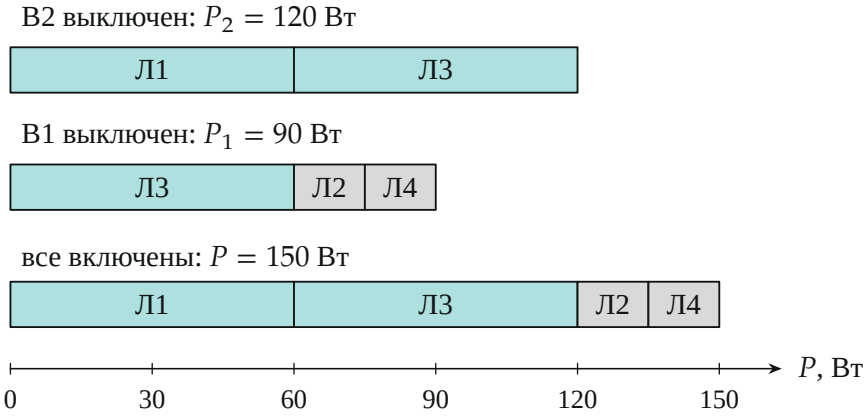
Отключён B1: Л3 — под U, Л2 и Л4 делят напряжение пополам; ветвь с Л1 обесточена.

$$P_1 = P_0 + 2 \cdot \frac{P_0}{4} = 1{,}5P_0 = 1{,}5 \cdot 60 = 90\ \text{Вт},$$

что совпадает с условием. Схема подходит: из одного условия найден P_0, второе проверено. Обратите внимание: при отключённом В1 лампы Л2 и Л4 горят вполсилы — не P_0 каждая, а $P_0/4$, потому что мощность растёт как квадрат напряжения.

5. Все выключатели включены. Л1 и Л3 — под U, по P_0; Л2 и Л4 — под $U/2$, по $P_0/4$ (то есть цепочка выделяет $P_0/2$):

$$P = 2P_0 + 2 \cdot \frac{P_0}{4} = 2{,}5P_0 = 2{,}5 \cdot 60 = 150 \text{ Вт}.$$



Мощности ламп в трёх режимах. Бирюзой — лампы под полным напряжением U, серым — под $U/2$.

Единственность. Остальные способы соединить четыре лампы последовательно и параллельно (любые сочетания последовательных и параллельных соединений; других для четырёх ламп не бывает) проверены перебором на компьютере: условиям $P_1 = 90$ Вт, $P_2 = 120$ Вт удовлетворяет только схема пункта 4 (с точностью до перестановки равноправных Л3 и Л4), и она даёт $P = 150$ Вт. Поэтому ответ на второй вопрос не зависит от выбора схемы.

Проверка. Размерность: $P_0 = U^2/R$ — ватты. Второй способ: по «потерянной» мощности. Л1 стоит в ветви одна, поэтому её отключение убирает ровно P_0: $P - P_1 = P_0$; Л2 стоит в цепочке с Л4, отключение

В2 убирает цепочку, $P - P_2 = P_0/2$. Подставляя $P = 2{,}5P_0$, получаем $P_0 = 60$ Вт и $P_0/2 = 30$ Вт: $150 - 90 = 60$ и $150 - 120 = 30$ — совпало. Предел: если бы цепочки Л2–Л4 не было, всё определялось бы только параллельными лампами и $P_1 = P_2$.

Физический смысл. В схеме три ветви; две лампы работают на полную мощность, две — вчетверо слабее каждая, поэтому суммарно набегает $2{,}5P_0$, а не $4P_0$.

Ответ. 1) схема — три параллельные ветви: (Л1 с В1), (Л3 с В3) и последовательная цепочка (В2, Л2, В4, Л4); мощность лампы при полном напряжении $P_0 = 60$ Вт; 2) $P = 2{,}5\,P_0 = 150$ Вт.