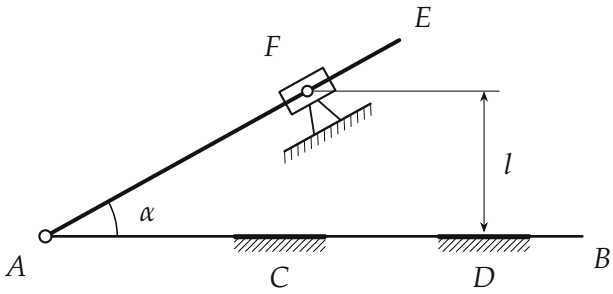
Шток и стержень со втулкой

Задача 3. [ИОШ 2020/21, 11 класс, задача 3] Шток AB плоского механизма движется в направляющих C и D со скоростью v. К штоку шарнирно прикреплён стержень AE. Стержень при своём движении проходит через поворотную втулку F, находящуюся на расстоянии l от штока (см. рисунок). Найти угловую скорость стержня AE в тот момент, когда угол между штоком и стержнем составляет α.



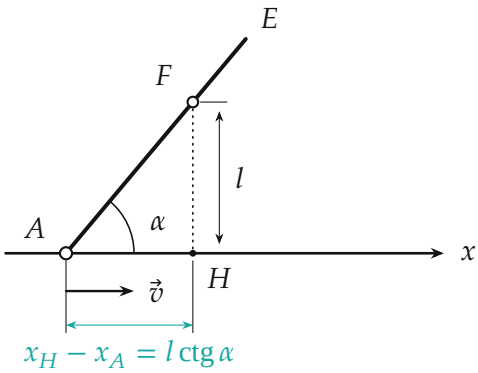
▲ **Решение. Что происходит.** Шток тянет конец A стержня вдоль прямой. Втулка F неподвижна и лишь поворачивается на месте, поэтому стержень скользит сквозь неё, а его прямая всё время проходит через точку F. Значит, положение точки A на штоке однозначно задаёт угол α: это кинематическая связь. Главная идея — записать связь между α и координатой точки A и продифференцировать её по времени. Угол α отсчитывается от неподвижного направления штока, поэтому угловая скорость стержня — это просто $d\alpha/dt$.

Обозначения. Ось x направим вдоль штока, $x_A(t)$ — координата точки A, H — основание перпендикуляра из втулки F на шток, x_H — его координата (она не меняется). Проекция скорости штока $v_x = dx_A/dt$; по модулю $|v_x| = v$, знак зависит от направления движения (положительна, если шток движется в сторону B). Ось вдоль штока удобна: скорость точки A лежит целиком на этой оси.

1. Связь угла с положением штока. Треугольник AHF прямоугольный: катет $FH = l$ постоянен, второй катет $x_H - x_A$ меняется со време-

нем. Поэтому

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_H - x_A}{l}.$$



К выводу связи: катет $FH = l$ постоянен, катет $x_H - x_A$ растёт или убывает вместе с положением точки A.

Обратите внимание: формула верна при любом α от $0°$ до $180°$. Когда точка A проходит основание перпендикуляра H (угол $90°$), разность $x_H - x_A$ меняет знак вместе с $\operatorname{ctg}\alpha$, и вывод остаётся тем же.

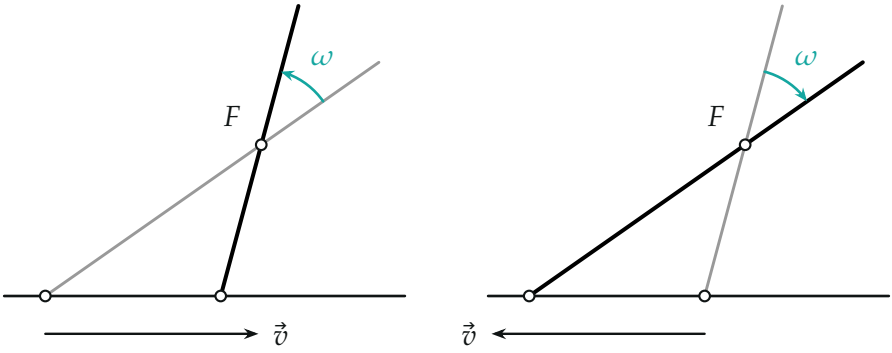
2. Дифференцируем по времени. Расстояние l и x_H постоянны, x_A меняется со скоростью v_x. Производная левой части — производная сложной функции: сначала по α, затем α по времени:

$$\frac{d}{dt}\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{x_H - x_A}{l} = -\frac{v_x}{l}.$$

Приравниваем:

$$-\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{v_x}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_x}{l}\sin^2\alpha.$$

Знак словами: если шток движется в сторону B, $v_x = +v$, угол растёт, и стержень поворачивается против часовой стрелки; если шток движется в сторону A, угол убывает, и стержень поворачивается по часовой стрелке. Модуль угловой скорости в обоих случаях один и тот же.



а) шток вправо б) шток влево

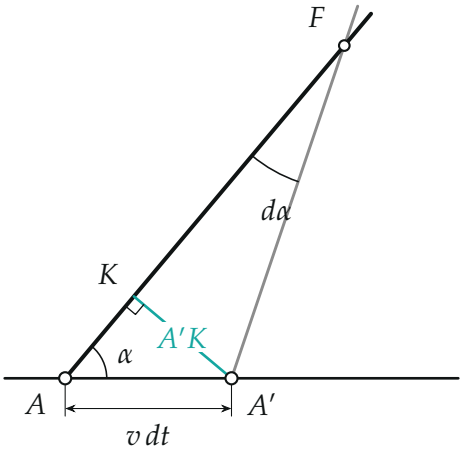
Два направления движения штока. Серым — положение стержня в начале малого промежутка времени, чёрным — в конце; ω — направление вращения.

3. Ответ для модуля.

$$\omega = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = \frac{v\,\sin^2\alpha}{l}.$$

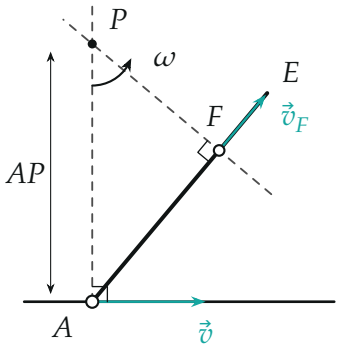
Второй способ: малое смещение. За малое время dt точка A сместится по штоку на $v\,dt$. Разложим это смещение на составляющую вдоль стержня и перпендикулярную ему. Вдоль стержня точка A скользит сквозь втулку и поворота не даёт; перпендикулярная составляющая равна $v\,dt\,\sin\alpha$ и поворачивает стержень вокруг F. Расстояние $AF = l/\sin\alpha$, и угол поворота (дуга = перпендикулярное смещение / радиус)

$$d\alpha = \frac{v\,dt\,\sin\alpha}{AF} = \frac{v\,\sin^2\alpha}{l}\,dt.$$



Смещение точки A на $v\,dt$ (на рисунке сильно увеличено): перпендикулярная стержню составляющая $A'K = v\,dt\,\sin\alpha$ даёт поворот $d\alpha$ вокруг F. Угол $\alpha + d\alpha$ между новым положением стержня и штоком — внешний угол при вершине A' треугольника AFA', он равен сумме внутренних углов при A и F, то есть $\alpha + \angle AFA'$. Значит, $d\alpha = \angle AFA'$, и поворот стержня виден как угол при F.

Третий способ: мгновенный центр скоростей. Скорость точки A направлена вдоль штока, а точка стержня у втулки F может двигаться только вдоль стержня (стержень скользит сквозь втулку). Мгновенный центр вращения стержня P лежит на пересечении перпендикуляров к этим скоростям: к $\vec{v}$ в точке A и к стержню в точке F.

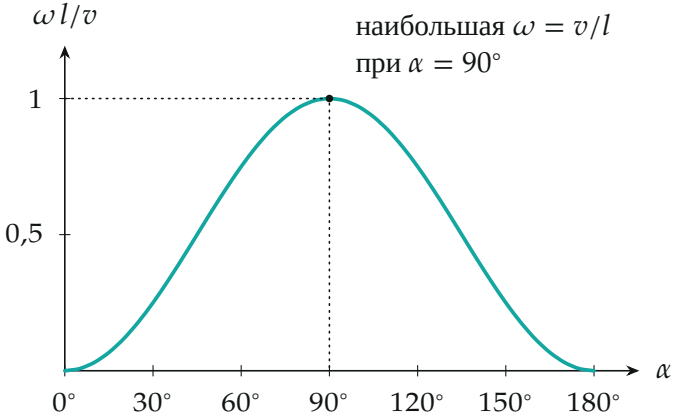


Мгновенный центр скоростей P: пересечение перпендикуляра к скорости точки A и перпендикуляра к стержню в точке F. В прямоугольном треугольнике AFP (прямой угол при F) угол при A равен $90° - \alpha$, поэтому $AP = AF/\sin\alpha = l/\sin^2\alpha$. Все точки стержня вращаются вокруг P с одной угловой скоростью, и для точки A

$$\omega = \frac{v}{AP} = \frac{v\sin^2\alpha}{l}.$$

Три способа дали один ответ.

Качественная картина. Скорость v постоянна, а угловая скорость — нет: она зависит от угла. Когда стержень почти вдоль штока ($\alpha \to 0°$ или $180°$), скорость точки A идёт вдоль стержня, на вращение почти ничего не остаётся, $\omega \to 0$. Когда стержень перпендикулярен штоку, вся скорость точки A идёт на вращение и ω наибольшая.



Зависимость угловой скорости стержня от угла: $\omega = (v/l)\sin^2\alpha$, симметрична относительно $\alpha = 90°$.

Проверка. Размерность: $[v/l] = $ м/с / м $= \text{с}^{-1}$, $\sin^2\alpha$ безразмерен. Предел $\alpha = 90°$: стержень перпендикулярен штоку, $AF = l$, скорость точки A вся перпендикулярна стержню, $\omega = v/AF = v/l$ — формула даёт то же. Предел $\alpha \to 0°$ и $\alpha \to 180°$: $\omega \to 0$, как и объяснено выше. Обратите внимание на типичную ошибку: $\omega = v/AF = v\sin\alpha/l$ невер-

но, поскольку скорость точки A направлена вдоль штока, а не перпендикулярно стержню; во вращение идёт только её составляющая $v\sin\alpha$, отсюда второй множитель $\sin\alpha$.

Физический смысл. Угловая скорость стержня — это поперечная составляющая скорости точки A (то есть $v\sin\alpha$), делённая на расстояние $AF = l/\sin\alpha$ до оси вращения; поэтому $\sin\alpha$ входит в ответ в квадрате.

Ответ. $\omega = \dfrac{v\sin^2\alpha}{l}$ (при движении штока к B стержень вращается против часовой стрелки, при движении к A — по часовой).