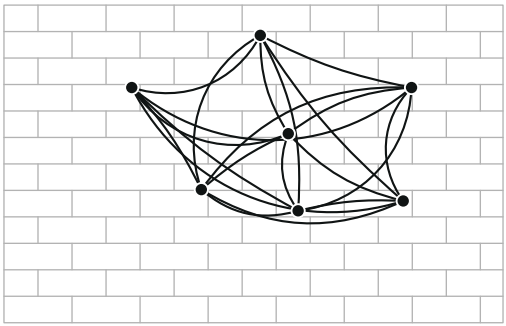
2021 гвоздь, соединённых проволоками

Задача 4. [ИОШ 2020/21, 11 класс, задача 4] Незнайка и Самоделкин провели следующий эксперимент. В кирпичную стену они вбили 2021 гвоздь. Затем они соединили каждый гвоздь с каждым кусками проволоки. Потом они подключили к двум случайно выбранным гвоздям омметр (прибор для измерения сопротивления). Что покажет прибор? Считать, что все куски проволоки имеют одинаковое сопротивление $r = 1$ Ом. Кирпич является диэлектриком. В точках пересечения проводов электрических контактов между ними нет (на рисунке показаны только семь из 2021 гвоздей).



▲ **Решение.** **Что происходит.** Каждый гвоздь соединён проволокой с каждым из остальных: гвозди — узлы цепи, проволоки — одинаковые резисторы r, между любыми двумя узлами ровно один резистор. Омметр подключён к двум узлам, и нужно найти сопротивление всей сети между ними. Рассчитывать напрямую сеть из двух тысяч узлов невозможно, а симметрия спасает: все остальные гвозди относятся к выбранной паре одинаково, значит, у них один и тот же потенциал, провода между ними тока не несут и из схемы выбрасываются. Остаётся набор параллельных ветвей. Это задача на симметричную цепь.

Обозначения. $N = 2021$ — число гвоздей; A и B — гвозди, к которым подключён омметр; $C_1, \ldots, C_n$ — остальные гвозди, $n = N - 2 = 2019$; φ — потенциал узла; $U = \varphi_A - \varphi_B$ — напряжение омметра; I — ток, входящий в A и выходящий из B.

1. Какая получилась схема. Узлов три сорта: A, B и n одинаковых C_k. Проволоки: один провод AB; по одному проводу от A к каждому C_k и от B к каждому C_k; по одному проводу между каждой парой C_k (их $n(n-1)/2$). Пересечения проводов контактов не дают, поэтому новых узлов нет. Нарисуем схему для пяти промежуточных узлов вместо 2019; суть та же.

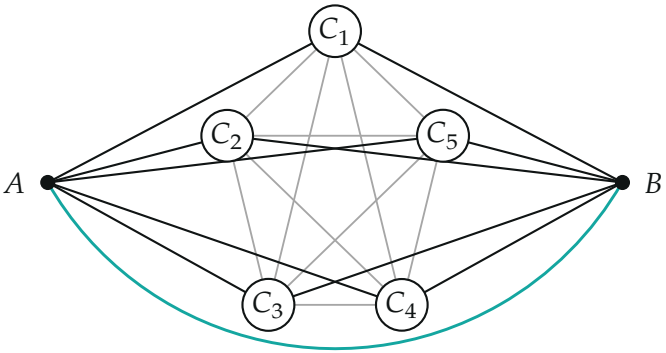


Схема с пятью промежуточными узлами C_k: чёрные — провода AC_k и BC_k, серые — провода между узлами C_k, бирюзовый — провод AB.

2. Потенциалы всех C_k одинаковы. Запишем закон сохранения заряда для узла C_i: сумма токов в узел равна нулю. К C_i подходят провода от A, от B и от остальных $n-1$ узлов C_j, всего $n+1$ проводов; ток в проводе — разность потенциалов, делённая на r:

$$(\varphi_A - \varphi_i) + (\varphi_B - \varphi_i) + \sum_{j\neq i}(\varphi_j - \varphi_i) = 0.$$

Обозначим $S = \sum_j \varphi_j$ (сумма по всем n узлам, включая i). Тогда $\sum_{j\neq i}\varphi_j = S - \varphi_i$, и уравнение принимает вид

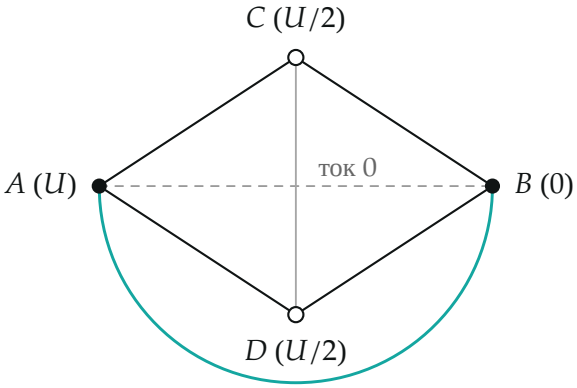
$$\varphi_A + \varphi_B + S - \varphi_i = (n+1)\,\varphi_i \;\Rightarrow\; \varphi_i = \frac{\varphi_A + \varphi_B + S}{n+2}.$$

Правая часть не содержит i: у всех C_k потенциал один и тот же, $\varphi_i = \varphi_C$.

Подставим $S = n\varphi_C$:

$$(n+2)\,\varphi_C = \varphi_A + \varphi_B + n\varphi_C \;\Rightarrow\; \varphi_C = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}.$$

Потенциал промежуточных гвоздей — середина между потенциалами A и B. Этот же вывод даёт симметрия: если поменять местами два узла C_i и C_j, схема и подключение омметра останутся прежними, поэтому и токи останутся прежними, то есть $\varphi_i = \varphi_j$.



Случай $N = 4$ (в скобках — потенциалы узлов): узлы C и D симметричны относительно штриховой оси AB, поэтому их потенциалы равны середине между U и 0, и по проводу CD тока нет.

3. Выбрасываем лишние провода. Между узлами с равными потенциалами ток не течёт, значит, ни один из $n(n-1)/2$ проводов между C_k не работает. Выбросим их — схема не изменится. Остаётся: провод AB с сопротивлением r и n цепочек $A-C_k-B$ из двух проводов, по $2r$ каждая. Все они включены параллельно между A и B. Поскольку потенциал всех C_k одинаков, их можно мысленно соединить в один узел — это даёт ту же картину.

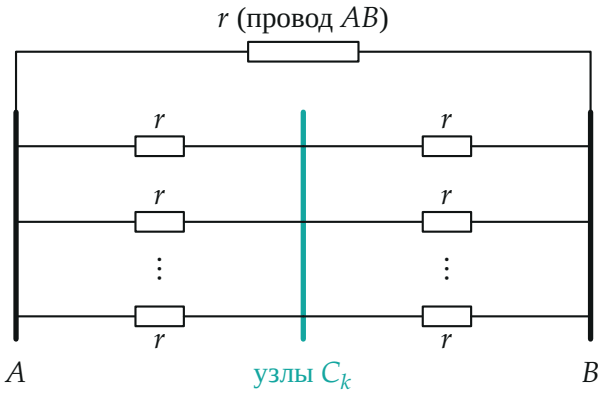
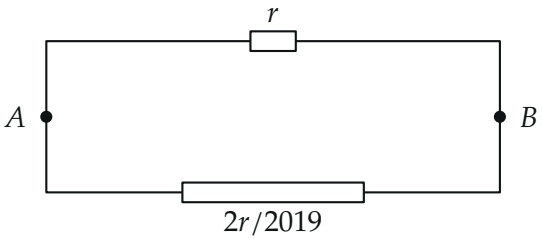


Схема после выбрасывания проводов между C_k: потенциалы всех C_k равны, поэтому их можно соединить в один узел (бирюзовая шина). Цепочек A–C_k–B — 2019.

4. Складываем проводимости параллельных ветвей. Проводимость параллельного соединения — сумма проводимостей:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{n}{2r} = \frac{n+2}{2r} = \frac{N}{2r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2r}{N}.$$

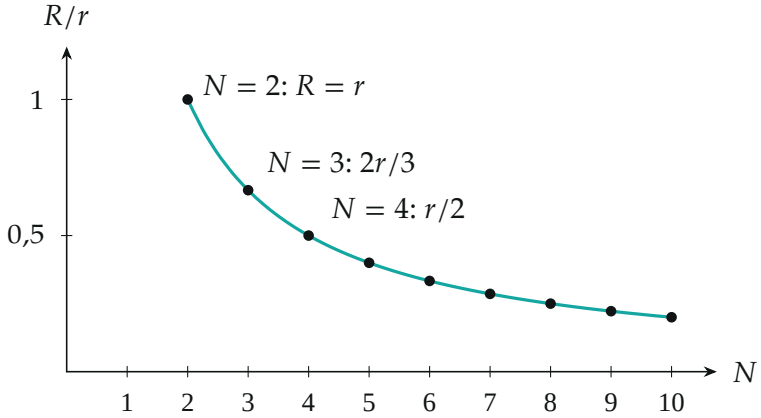


Итоговая схема: провод AB параллельно $n = 2019$ цепочкам по $2r$, то есть параллельно одному сопротивлению $2r/2019$. Для $N = 2021$ и $r = 1$ Ом

$$R = \frac{2 \cdot 1 \text{ Ом}}{2021} \approx 0{,}99 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \approx 1 \text{ мОм}.$$

Омметр покажет около одной тысячной ома. Обратите внимание: результат не зависит от того, какие два гвоздя выбраны, — в этом и состоит равноправие узлов полного графа.

Проверка. Размерность: $R = 2r/N$ — в омах. Частные случаи. $N = 2$: два узла, один провод, $R = r$ — формула даёт $2r/2 = r$. $N = 3$: три провода-треугольник; между двумя вершинами провод r параллельно цепочке $2r$, то есть $r \cdot 2r/(3r) = 2r/3$ — формула даёт $2r/3$. $N = 4$: $r \parallel 2r \parallel 2r$, $1/R = 1/r + 1/(2r) + 1/(2r) = 2/r$, $R = r/2 = 2r/4$. Второй способ — прямой расчёт на компьютере: полную систему уравнений для всех узлов полного графа с $N = 7$ и $N = 2021$ решили численно, получили $0{,}2857\,r = 2r/7$ и $0{,}00098961\,r = 2r/2021$, причём потенциалы всех промежуточных узлов совпали с половиной напряжения. Предел $N \to \infty$: путей между A и B становится всё больше, $R \to 0$ — логично.



Сопротивление между двумя узлами полного графа из N одинаковых проводов r: точки — вычисленные значения для $N = 2, 3, 4, \ldots, 10$, кривая — $R = 2r/N$.

Физический смысл. Сопротивление падает почти обратно пропорционально числу гвоздей: каждый новый гвоздь добавляет параллельный путь A–C–B, а все пути идут через узлы с одинаковым потенциалом и не мешают друг другу.

Ответ. $R = \dfrac{2r}{2021} \approx 0{,}99 \cdot 10^{-3}$ Ом (около 1 мОм).