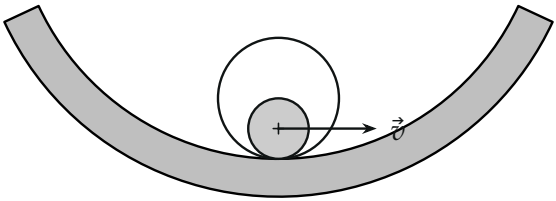
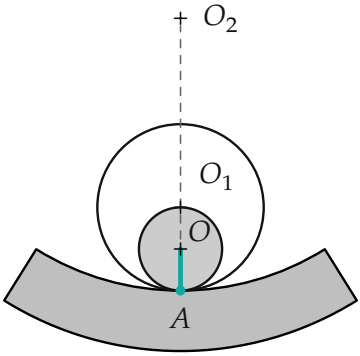
Диск в трубе и обруч

Задача 5. [ИОШ 2020/21, 11 класс, задача 5] По внутренней поверхности трубы с внутренним радиусом R катится диск радиуса r, прижимая к трубе тонкий обруч радиуса $2r$ ($R > 2r$). Линейная скорость центра диска равна v. Найти угловые скорости диска и обруча. Проскальзывания нет.



▲ **Решение. Что происходит.** Труба неподвижна. Диск прижимает обруч к трубе, и все три тела всё время касаются в одной точке P (внизу, как на рисунке). Без проскальзывания скорость той точки обруча, которой он касается трубы, равна скорости трубы — нулю; диск касается обруча без проскальзывания, поэтому и его точка в P неподвижна. Значит, P — мгновенный центр скоростей и диска, и обруча: оба тела в каждый момент поворачиваются вокруг P. Остаётся найти скорость центра обруча и разделить скорости центров на расстояния до P. Это задача на качение внутри окружности (кинематика твёрдого тела).

Обозначения. O_2 — ось трубы, O и O_1 — центры диска и обруча; Ω — угловая скорость линии O_2P вокруг оси трубы; $\omega_д$, $\omega_о$ — угловые скорости диска и обруча вокруг собственных центров; v_1 — скорость центра обруча. Положительное направление вращения — по часовой стрелке при движении центров вправо.



Нижнее положение: центры O, O_1 и ось трубы O_2 лежат на одной вертикали, A — точка, которой тела касаются друг друга в этот момент. Для наглядности тела нарисованы чуть раздвинутыми.

1. Центры движутся по окружностям вокруг O_2. Диск касается обруча изнутри в нижней точке, а обруч касается трубы: расстояния от оси трубы до центров O и O_1 равны $R - r$ и $R - 2r$ (в нижнем положении — по вертикали: $O_2P = R$, $PO = r$, $PO_1 = 2r$). При качении линия O_2P поворачивается вокруг O_2 с угловой скоростью Ω, а центры O и O_1 остаются на этой линии, поэтому

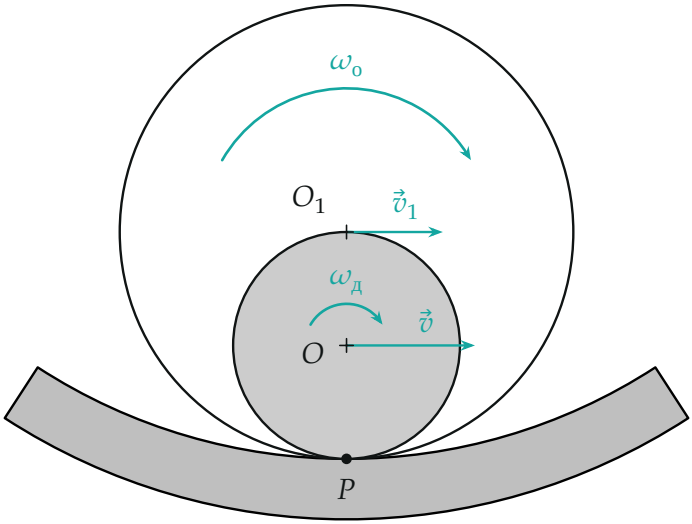
$$v = \Omega\,(R - r), \qquad v_1 = \Omega\,(R - 2r).$$

Из первого равенства $\Omega = \dfrac{v}{R - r}$, значит,

$$v_1 = v\,\frac{R - 2r}{R - r}.$$

Обратите внимание: скорость центра обруча не равна v: центр обруча движется по окружности меньшего радиуса $R - 2r$ с той же угловой скоростью Ω.

2. Точка касания неподвижна. Раз проскальзывания нет, мгновенный центр скоростей каждого из тел — точка P. Отсюда у каждого тела скорость центра равна произведению угловой скорости тела на расстояние от центра до P.



Скорости центров O и O_1 и вращение тел вокруг мгновенного центра скоростей P.

3. Угловые скорости. Центр диска находится на расстоянии r от P, центр обруча — на расстоянии $2r$:

$$v = \omega_д r \;\Rightarrow\; \omega_д = \frac{v}{r}, \qquad v_1 = \omega_о \cdot 2r \;\Rightarrow\; \omega_о = \frac{v_1}{2r} = \frac{(R-2r)\,v}{2r\,(R-r)}.$$

Оба тела вращаются по часовой стрелке, если центры движутся вправо: центр выше точки P движется вправо, значит, тело поворачивается вокруг P по часовой стрелке. Обратите внимание: $v/(R-r)$ — это угловая скорость Ω движения центра вокруг оси трубы, а вовсе не вращения диска вокруг своего центра; во вращение вокруг себя входит ещё и качение по трубе.

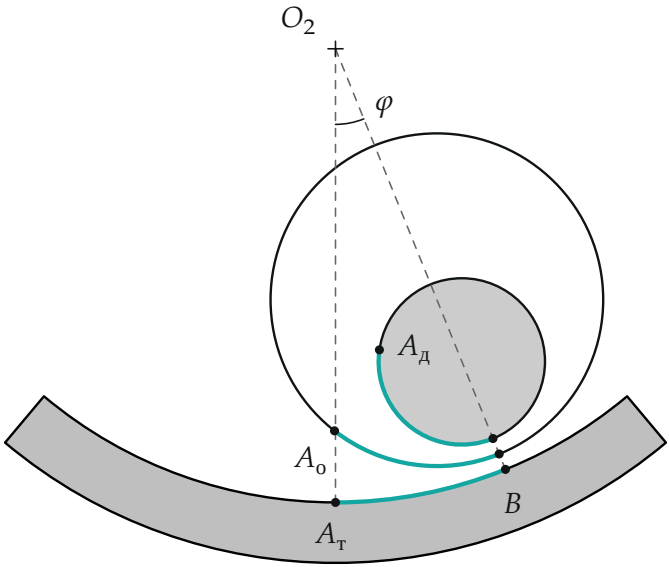
Второй способ: равные дуги (как у организаторов). Пусть за малое время контакт сместился по трубе на угол φ (линия центров повернулась на φ). Тела катятся без проскальзывания, поэтому длины дуг, по которым они коснулись друг друга, одинаковы:

$$R\varphi = 2r\,\beta_о = r\,\beta_д,$$

где $\beta_о$, $\beta_д$ — углы, на которые отстоят от новой точки касания B первоначально касавшиеся точки обруча и диска. Но эти углы отсчитаны от линии центров, а она сама повернулась на φ; поэтому поворот тела в неподвижных осях на φ меньше:

$$\varphi_о = \beta_о - \varphi = \frac{R\varphi}{2r} - \varphi = \frac{(R-2r)\,\varphi}{2r},$$

$$\varphi_д = \beta_д - \varphi = \frac{R\varphi}{r} - \varphi = \frac{(R-r)\,\varphi}{r}.$$

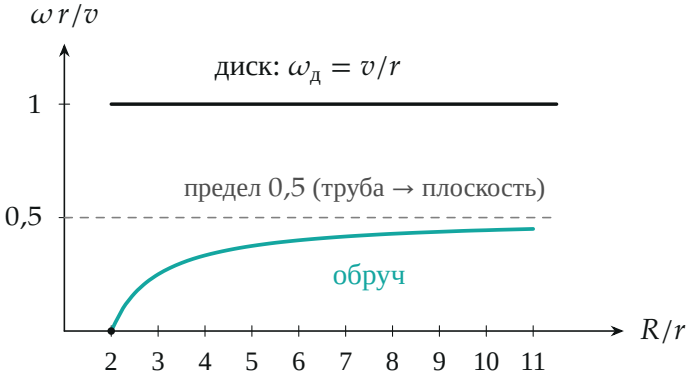


Малый поворот: точки $A_т$ (трубы), $A_о$ (обруча) и $A_д$ (диска), касавшиеся друг друга в начале, и новая точка касания B. Бирюзовые дуги $A_тB$, $A_оB$, $A_дB$ имеют одну и ту же длину $R\varphi$. Тела раздвинуты для наглядности. Дуга центра диска $(R-r)\varphi = v\,dt$ даёт $\varphi = v\,dt/(R-r)$. Делим повороты на dt:

$$\omega_д = \frac{\varphi_д}{dt} = \frac{(R-r)}{r}\cdot\frac{v}{R-r} = \frac{v}{r}, \qquad \omega_о = \frac{\varphi_о}{dt} = \frac{R-2r}{2r}\cdot\frac{v}{R-r}.$$

Результат тот же.

Качественная картина. Диск вращается с постоянной угловой скоростью v/r, не зависящей от радиуса трубы. Обруч — медленнее, потому что его центр движется по меньшей окружности с той же Ω. Чем шире труба, тем ближе угловая скорость обруча к $v/(2r)$, как у обруча на плоскости; когда труба вплотную по размеру обруча ($R \to 2r$), обруч останавливается.



Угловые скорости в единицах v/r в зависимости от отношения R/r: у диска — горизонталь, у обруча — кривая от 0 при $R = 2r$ к 0,5 при $R \to \infty$.

Проверка. Размерность: $[v/r] = \text{с}^{-1}$, отношения радиусов безразмерны. Предел $R \to \infty$ (труба стала плоскостью): $\omega_\text{д} = v/r$ — диск катится по плоскости, $\omega_\text{о} \to v/(2r)$ — обруч радиуса $2r$ катится со скоростью центра v, всё верно. Предел $R \to 2r$: $\omega_\text{о} \to 0$ и $v_1 \to 0$: обруч радиуса $2r$ прилегает к трубе радиуса $2r$ и не может катиться. Второй способ (дуги) дал тот же результат; ответ организаторов совпал.

Физический смысл. Угловая скорость катящегося внутри окружности тела — это скорость его центра, делённая на радиус тела. Центр диска движется со скоростью v, центр обруча — чуть медленнее, потому что идёт по меньшей окружности.

Ответ. $\omega_\text{д} = \dfrac{v}{r}$, $\omega_\text{о} = \dfrac{(R-2r)\,v}{2r\,(R-r)}$ (оба тела вращаются в одну сторону — по часовой стрелке при движении центров вправо).