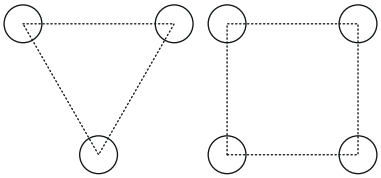
Компоновка топлива в реакторе

Задача 1. [ИОШ 2020/21, 9 класс, задача 1] В атомных реакторах на быстрых нейтронах выгодно обеспечить максимальную объёмную долю топлива. Топливо загружается в реактор в виде вертикальных цилиндрических стержней (см. рисунок, вид сверху; показано сечение одной ячейки активной зоны реактора — или треугольной (слева), или квадратной (справа), круги — сечения топливных стержней). Какая из компоновок реактора — с ячейкой в виде квадрата или равностороннего треугольника — лучше удовлетворяет этому требованию? Найдите объёмную долю топлива в реакторах с треугольной или квадратной ячейкой, если диаметр топливных стержней d, сторона ячейки (и треугольной, и квадратной) a.



1. Какая компоновка лучше?
2. Найдите объёмную долю топлива в реакторах с треугольной и квадратной ячейкой.

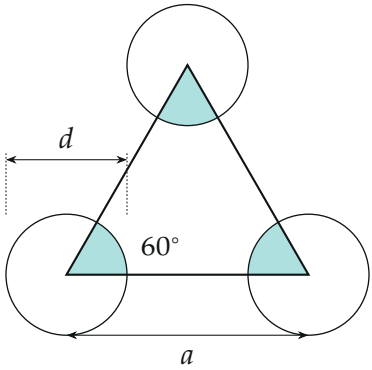
▲ **Решение. Что происходит.** Активная зона составлена из одинаковых ячеек, которые без зазоров заполняют всё сечение реактора, поэтому доля топлива в реакторе равна доле топлива в одной ячейке. Стержни и ячейки — вертикальные призмы одной высоты h, а объём призмы равен площади сечения на высоту; высота сократится, и задача сведётся к геометрии на плоскости: какую долю площади ячейки занимают круги стержней. Это задача на подсчёт «долей» стержня, приходящихся на одну ячейку.

Обозначения. $S_{\text{тр}}$, $S_{\text{кв}}$ — площади треугольной и квадратной ячеек; $s_{\text{тр}}$, $s_{\text{кв}}$ — площадь топлива внутри одной ячейки; $s_0 = \pi d^2/4$ — площадь сечения одного стержня; $\eta = s/S$ — объёмная доля топлива.

1. Почему хватает площадей. Объём топлива в ячейке $s\,h$, объём ячейки $S\,h$, поэтому

$$\eta = \frac{s\,h}{S\,h} = \frac{s}{S}.$$

2. Треугольная ячейка. Центры стержней стоят в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Внутрь ячейки попадает сектор каждого круга с углом, равным углу треугольника, 60°, — шестая часть круга (закрашено на рисунке). Так и должно быть: вокруг каждого стержня сходятся шесть треугольных ячеек, и каждая получает свою шестую часть.



Треугольная ячейка (здесь $d = a/2$): в неё попадают три сектора по 60° — вместе половина круга.

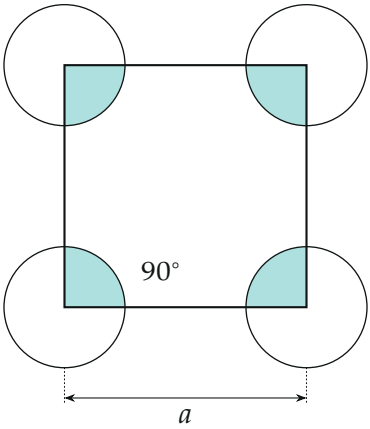
Площадь топлива в ячейке и площадь ячейки:

$$s_{\text{тр}} = 3 \cdot \frac{s_0}{6} = \frac{s_0}{2} = \frac{\pi d^2}{8}, \qquad S_{\text{тр}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2,$$

откуда

$$\eta_{\text{тр}} = \frac{\pi d^2/8}{\sqrt{3}\,a^2/4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{d^2}{a^2} \approx 0{,}907\,\frac{d^2}{a^2}.$$

3. Квадратная ячейка. Теперь угол ячейки 90°, в неё попадает четверть каждого круга, а вокруг каждого стержня сходятся четыре квадрата:



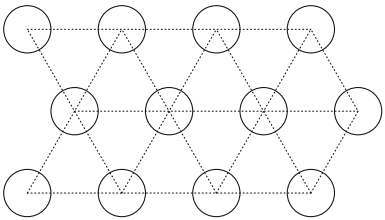
Квадратная ячейка (тот же $d = a/2$): четыре четверти круга — целый круг.

$$s_{\text{кв}} = 4 \cdot \frac{s_0}{4} = s_0 = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad S_{\text{кв}} = a^2, \qquad \eta_{\text{кв}} = \frac{\pi}{4}\,\frac{d^2}{a^2} \approx 0{,}785\,\frac{d^2}{a^2}.$$

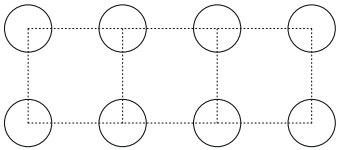
4. Сравнение. При одинаковых d и a

$$\frac{\eta_{\text{тр}}}{\eta_{\text{кв}}} = \frac{\pi/(2\sqrt{3})}{\pi/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15 > 1.$$

Причина видна на рисунке решётки: на один стержень в треугольной решётке приходится площадь двух треугольников, $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 0{,}87a^2$, а в квадратной — целый квадрат a^2. Стержни при том же шаге a стоят теснее.



треугольная решётка



квадратная решётка

Фрагменты активной зоны. В треугольной решётке каждый стержень окружён шестью соседями, в квадратной — четырьмя; шаг a в обеих одинаковый.

Обратите внимание: в одну ячейку попадает не целый стержень и не три стержня, а только секторы; считать «по три круга в треугольнике» — ошибка в 6 раз.

Проверка. Доли безразмерны. Предел плотной упаковки $d = a$ (стержни касаются): $\eta_{\text{тр}} = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0{,}907$ — известная наибольшая плотность упаковки кругов на плоскости, $\eta_{\text{кв}} = \pi/4 \approx 0{,}785$; обе меньше единицы, как и должно быть. Тот же ответ даёт подсчёт «площадь решётки на один стержень»: $\eta_{\text{тр}} = s_0/(\frac{\sqrt{3}}{2}a^2)$.

Смысл. Шестиугольная (треугольная) укладка плотнее квадратной на 15 %, поэтому её и выбирают для реакторов на быстрых нейтронах.

Ответ. 1) лучше треугольная ячейка; 2) $\eta_{\text{тр}} = \dfrac{\pi d^2}{2\sqrt{3}\,a^2} \approx 0{,}91\,\dfrac{d^2}{a^2}$, $\eta_{\text{кв}} = \dfrac{\pi d^2}{4a^2} \approx 0{,}79\,\dfrac{d^2}{a^2}$, их отношение $2/\sqrt{3} \approx 1{,}15$.