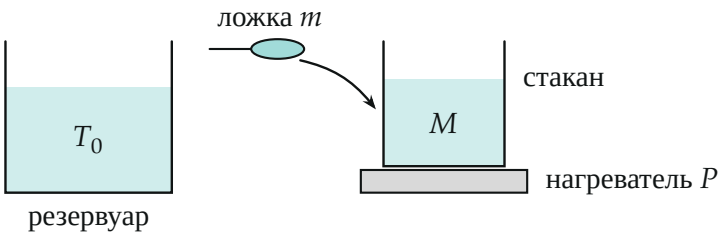
Закипание воды после добавки

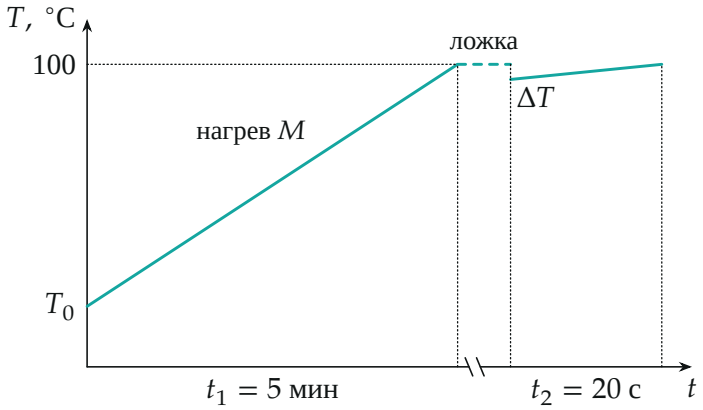
Задача 2. [ИОШ 2020/21, 9 класс, задача 2] В лабораторный стакан (допускающий кипячение воды) налили воду из резервуара и включили нагреватель. Через время $t_1 = 5$ минут вода закипела. Тогда в стакан из резервуара добавили ещё ложку воды, и температура воды в стакане уменьшилась на $\Delta T = 5°$, но через $t_2 = 20$ секунд вода в стакане закипела снова. Найти температуру воды в резервуаре. Теплопотерями пренебречь. Температура кипения воды $T_к = 100°\text{C}$.



Поясняющий рисунок: вода M в стакане на нагревателе и ложка воды m из резервуара.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Нагреватель отдаёт воде одну и ту же мощность P. Сначала он греет порцию M от T_0 до кипения за t_1. Потом холодная ложка m смешивается с кипящей водой, общая температура падает на ΔT, и нагреватель за t_2 возвращает всю воду $M + m$ к кипению. Это задача на уравнение теплового баланса: три процесса — три уравнения, неизвестные P, M, m уйдут делением.

Обозначения. T_0 — температура в резервуаре; M — первая порция воды; m — масса ложки; P — мощность нагревателя; c — удельная теплоёмкость воды.



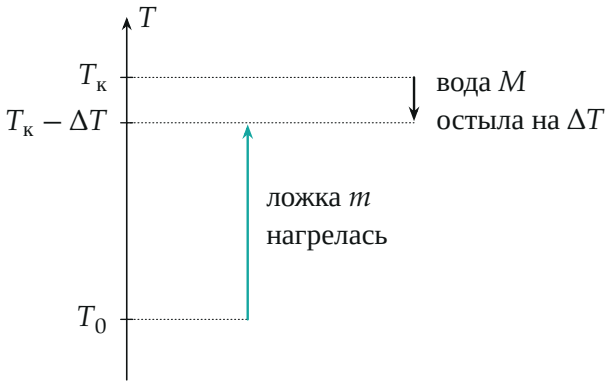
Температура воды в стакане (построено для ответа $T_0 = 20°C$; на оси времени разрыв, справа масштаб в 15 раз крупнее).

1. Нагрев первой порции. Теплопотерь нет, поэтому вся работа нагревателя за t_1 идёт на нагрев воды M от T_0 до $T_к$ (уравнение теплового баланса):

$$P\,t_1 = c\,M\,(T_к - T_0).$$

2. Смешивание с ложкой. Кипящая вода M остывает до $T_к - \Delta T$, а ложка m нагревается от T_0 до той же температуры; теплота, отданная водой, равна теплоте, полученной ложкой:

$$c\,M\,\Delta T = c\,m\,(T_к - \Delta T - T_0).$$



Смешивание (интервалы не в масштабе): ложка проходит большой интервал температур, вода M — маленький ΔT.

3. Нагрев смеси. За t_2 нагреватель поднимает температуру всей воды $M + m$ на ΔT:

$$P\,t_2 = c\,(M + m)\,\Delta T.$$

4. Исключаем лишнее. Неизвестных P, c в ответе быть не должно — делим уравнение пункта 1 на уравнение пункта 3:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{M\,(T_к - T_0)}{(M + m)\,\Delta T}.$$

Уравнение пункта 2 перепишем, перенеся $c\,m\,\Delta T$ влево: $(M + m)\,\Delta T = m\,(T_к - T_0)$. Подставим в знаменатель:

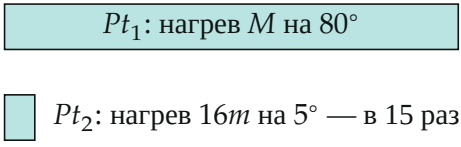
$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{M\,(T_к - T_0)}{m\,(T_к - T_0)} = \frac{M}{m}.$$

Отношение масс равно отношению времён: $M/m = 300/20 = 15$. Из того же уравнения пункта 2

$$\frac{T_к - T_0}{\Delta T} = \frac{M + m}{m} = 1 + \frac{t_1}{t_2}$$

и

$$T_0 = T_к - \Delta T\left(1 + \frac{t_1}{t_2}\right) = 100^\circ - 5^\circ \cdot 16 = 20^\circ\text{C}.$$



Теплота от нагревателя на двух этапах при $M = 15m$: $Pt_1 \propto 15m \cdot 80^\circ = 1200m$, $Pt_2 \propto 16m \cdot 5^\circ = 80m$; отношение 15, как $t_1 : t_2$.

Обратите внимание: $t_1 = 5$ минут и $t_2 = 20$ секунд надо привести к одним единицам; отношение $t_1/t_2 = 15$, а не $1/4$.

Проверка. Размерность: $\Delta T\, t_1/t_2$ — градусы. Подстановка чисел при $m = 1$, $M = 15$: смешивание $15 \cdot 5 = 75 = 1 \cdot (95 - 20)$ — верно; нагрев $Pt_1 \propto 15 \cdot 80 = 1200$, $Pt_2 \propto 16 \cdot 5 = 80$, отношение $15 = t_1/t_2$ — верно. Предел: если бы ложка была кипящей ($T_0 = T_к$), температура не упала бы, $\Delta T = 0$.

Смысл. Короткое второе кипячение говорит, что ложка мала ($m = M/15$), а заметное падение температуры — что она холодная: $T_0 = 20°\text{C}$, комнатная вода.

Ответ. $T_0 = T_к - \Delta T \left(1 + \dfrac{t_1}{t_2}\right) = 20°\text{C}$.