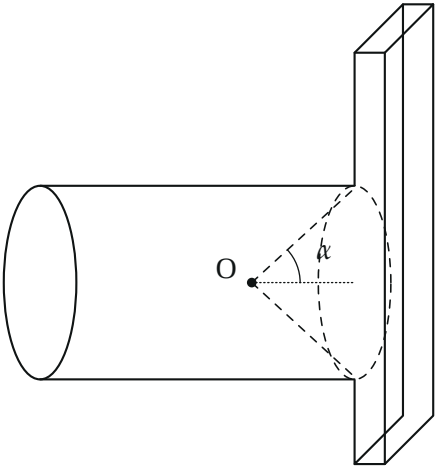
Кумулятивный снаряд

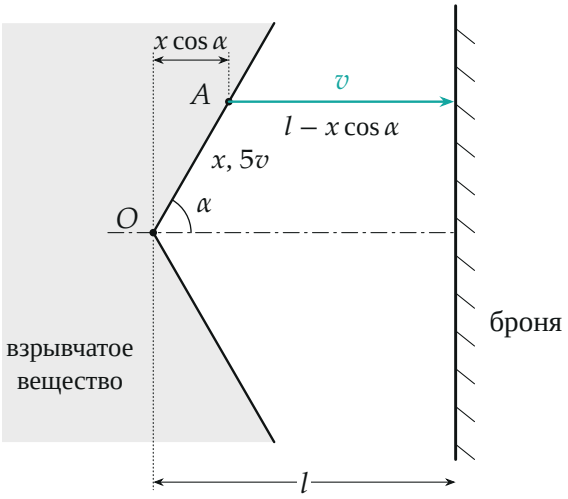
Задача 3. [ИОШ 2020/21, 9 класс, задача 3] В передней части кумулятивного противотанкового снаряда во взрывчатом веществе сделана коническая выемка (см. рисунок). Детонация снаряда начинается из вершины выемки (точки O) в тот момент, когда снаряд коснётся брони танка. После этого по взрывчатому веществу со скоростью $5v$ распространяется волна детонации (вовлечение в процесс взрыва новых участков взрывчатого вещества), а продукты взрыва разлетаются по всем направлениям со скоростью v. Максимальное поражение брони будет достигаться тогда, когда продукты взрыва от всех участков выемки достигнут брони танка одновременно. Каким для этого должен быть угол α при вершине выемки?



▲ **Решение. Что происходит.** Сначала по взрывчатке бежит волна детонации: из вершины O вдоль стенки выемки она за время $x/(5v)$ доходит до точки A на расстоянии x от вершины. Только тогда из A вылетают продукты взрыва и летят к броне со скоростью v. Чем дальше точка от вершины, тем позже она взрывается, но тем ближе она к броне. Нужно, чтобы эти два эффекта точно скомпенсировали друг друга для всех точек: суммарное время «детонация + полёт» не должно зависеть от x. Это

задача на «расстояние – время – скорость» с условием одновременного прихода (тот же принцип, что у волнового фронта по Гюйгенсу).

Обозначения. Ось X — ось снаряда, от вершины к броне; l — расстояние от вершины O до брони; α — угол между осью и образующей выемки (на рисунке условия отмечен он; полный угол при вершине равен 2α); A — точка образующей, $OA = x$.



Сечение выемки плоскостью через ось (угол α нарисован меньше найденного, чтобы были видны отрезки). Детонация идёт от O до A по образующей со скоростью $5v$, продукты летят от A к броне по кратчайшему пути — перпендикулярно броне.

1. Время детонации до точки A. Волна детонации идёт от O по взрывчатке со скоростью $5v$, кратчайший путь до A — отрезок $OA = x$ (он лежит на границе взрывчатки):

$$t_д = \frac{x}{5v}.$$

2. Время полёта продуктов от A до брони. Продукты летят по всем направлениям со скоростью v; первыми до брони долетают те, что летят перпендикулярно ей, вдоль оси X. Координата точки A вдоль оси —

проекция OA на ось: $x\cos\alpha$. До брони остаётся $l - x\cos\alpha$, поэтому

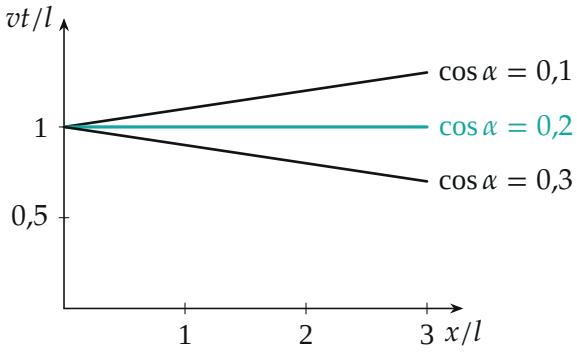
$$t_{\text{п}} = \frac{l - x\cos\alpha}{v}.$$

3. Условие одновременного прихода. Полное время от касания до удара продуктов из точки A

$$t(x) = \frac{x}{5v} + \frac{l - x\cos\alpha}{v} = \frac{l}{v} + \frac{x}{5v}(1 - 5\cos\alpha).$$

Это линейная функция x; она одинакова для всех точек выемки, только если коэффициент при x равен нулю:

$$1 - 5\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{5}, \qquad \alpha = \arccos\frac{1}{5} \approx 78^\circ.$$

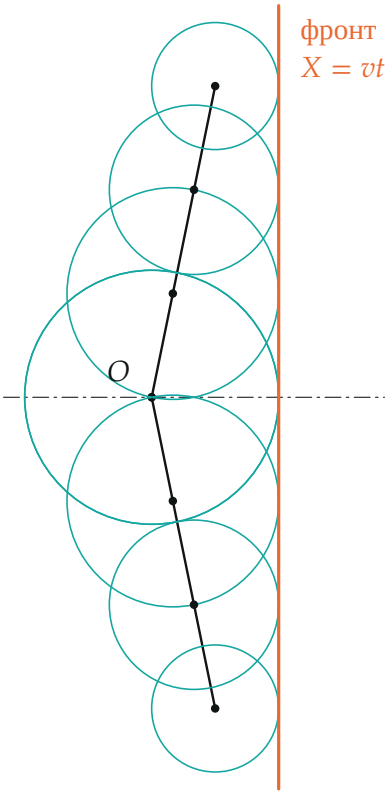


Время прихода продуктов к броне от точки на расстоянии x от вершины: $vt/l = 1 + \frac{x}{5l}(1 - 5\cos\alpha)$. Горизонтальна только прямая $\cos\alpha = 1/5$.

4. Второй способ: фронт по Гюйгенсу. Из каждой точки A в момент t разлетается сфера продуктов радиуса $r = v\,(t - x/5v) = vt - x/5$. Её передняя (ближайшая к броне) точка имеет координату

$$X = x\cos\alpha + vt - \frac{x}{5} = vt + x\left(\cos\alpha - \frac{1}{5}\right).$$

При $\cos\alpha = 1/5$ у всех сфер $X = vt$: огибающая сфер — плоскость, параллельная броне, и она приходит на броню целиком сразу.



Сферы продуктов взрыва в один и тот же момент от точек $x = 0,\ s,\ 2s,\ 3s$ образующей ($\cos\alpha = 1/5$): чем позже взорвалась точка, тем меньше сфера, но тем ближе её центр к броне. Все сферы касаются одной плоскости.

Обратите внимание: в задаче спрашивается «угол при вершине», а на рисунке условия отмечен угол между осью и образующей. Именно он равен $\arccos(1/5) \approx 78°$; полный раствор конуса $2\alpha \approx 157°$ — выемка получается очень пологой.

Проверка. $\cos\alpha$ безразмерен. Предел: если бы детонация была бесконечно быстрой, все точки взрывались бы сразу, и одновременность требовала бы плоского дна ($\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$); при скорости детона-

ции nv получаем $\cos\alpha = 1/n$ — при $n = 5$ угол чуть меньше $90°$. Если бы детонация шла со скоростью v, то $\alpha = 0$ — выемка вырождается.

Смысл. Форма выемки подобрана так, чтобы фронт продуктов взрыва был плоским и ударил в броню весь сразу; это тот же принцип, по которому строят фронт волны Гюйгенса.

Ответ. Угол между осью и образующей выемки $\alpha = \arccos\dfrac{1}{5} \approx 78°$ (полный угол раствора $2\alpha \approx 157°$).