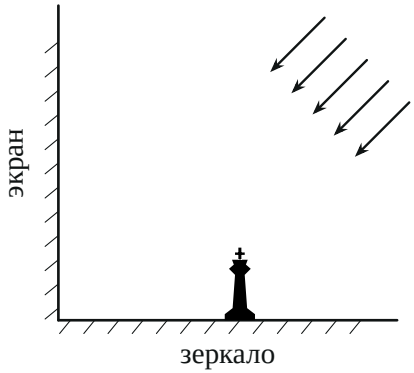
Шахматная фигура на зеркале

Задача 4. [ИОШ 2020/21, 9 класс, задача 4] На горизонтальном зеркале недалеко от экрана стоит шахматная фигура. Фигура освещается параллельным потоком лучей, падающих на неё наклонно (см. рисунок). Будет ли видна на экране тень фигуры? И если да, то какой она будет — увеличенной, уменьшенной, прямой, перевёрнутой? Ответ сопроводить построением хода лучей.



▲ **Решение. Что происходит.** В каждую точку экрана свет может прийти двумя путями: прямо от источника (пучок идёт вниз-влево) и после отражения от зеркала (отражённый пучок идёт вверх-влево). Фигура может перекрыть каждый из этих пучков, и на экране появятся места, куда приходит только один пучок из двух, — там освещённость вдвое меньше, это и есть тень. Задача на построение хода лучей при отражении от плоского зеркала: отражённый луч симметричен падающему относительно нормали к зеркалу.

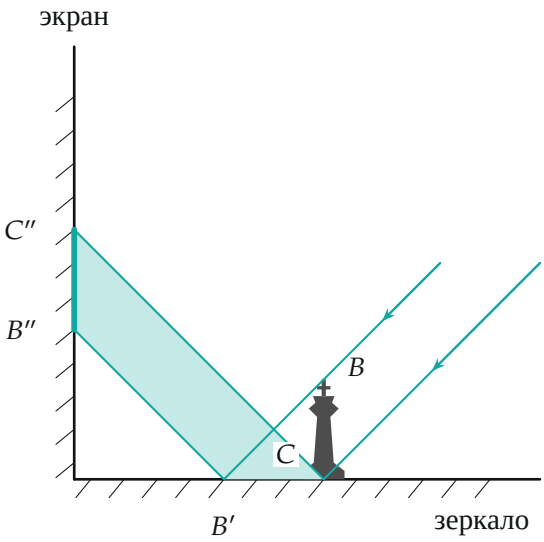
Обозначения. D — расстояние от фигуры до экрана; h — высота фигуры; φ — угол падающих лучей с горизонтом (на рисунках $\varphi = 45°$, $D = 2{,}5h$); B — верх фигуры, C — её основание; штрихом отмечены точки на зеркале, двумя штрихами — на экране.

1. Тень от прямого пучка. Рассмотрим лучи источника, которые фигура перехватывает *до* зеркала. Без фигуры луч через верх B дошёл бы

до зеркала в точке B', отразился и попал на экран в B''; луч через основание C отражается прямо у основания и приходит в C''. Лучи через промежуточные точки фигуры заполняют полосу между ними. Высоты на экране (по равнобедренным прямоугольным треугольникам при $\varphi = 45°$, в общем случае — с $\operatorname{tg}\varphi$):

$$y_{C''} = D\operatorname{tg}\varphi, \qquad y_{B''} = D\operatorname{tg}\varphi - h.$$

Верх фигуры оказался внизу, основание — вверху: эта тень **перевёрнутая**, её высота h.

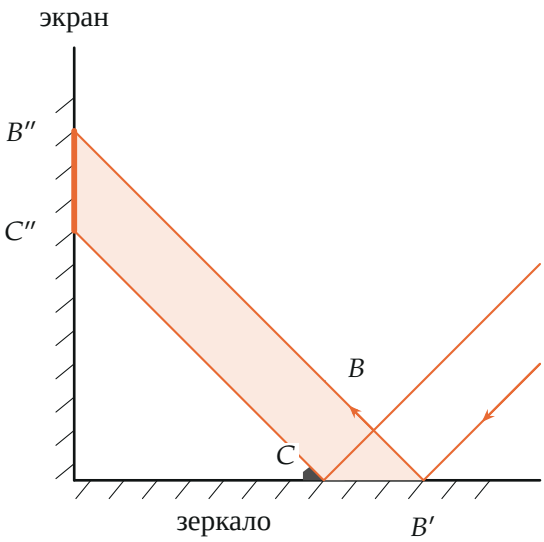


Лучи источника, перехваченные фигурой до зеркала (бирюзовые). Без фигуры они осветили бы полосу $B''C''$ экрана; теперь туда приходит только отражённый пучок.

2. Тень от отражённого пучка. Теперь лучи, которые уже отразились от зеркала и летят вверх-влево; фигура перехватывает их *после* зеркала. Отражённый луч через основание C приходит на экран в C'' на той же высоте $D\operatorname{tg}\varphi$, а через верх B — на высоту

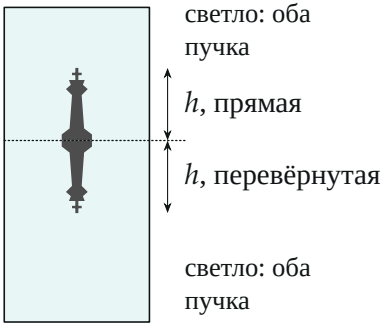
$$y_{B''} = D\operatorname{tg}\varphi + h.$$

Верх выше основания — эта тень **прямая**, тоже высотой h.



Отражённые лучи, перехваченные фигурой (красные). Прямо над первой тенью получается вторая.

3. Почему размер не меняется. Все падающие лучи параллельны, а плоское зеркало оставляет отражённые лучи параллельными (угол отражения равен углу падения для каждого). Параллельный пучок переносит каждую точку фигуры на экран сдвигом вдоль одного направления, а такой перенос сохраняет вертикальные размеры: точки B и C на одной вертикали дают точки экрана на расстоянии h друг от друга (вертикальная разность $1 \cdot h$ при движении по лучу под углом φ к горизонту не меняется, меняется только общий сдвиг $D \operatorname{tg} \varphi$). Значит, обе тени равны фигуре: не увеличены и не уменьшены.



вид на экран

Что видно на экране: две тени фигуры в натуральную величину — прямая сверху и перевёрнутая под ней, они соприкасаются основаниями на высоте $D\operatorname{tg}\varphi$*. В тени свет приходит только одним пучком, поэтому она вдвое темнее, чем остальной экран.*

Обратите внимание: тень не чёрная. В каждую её точку всё равно попадает один из двух пучков, так что это «полутень» с вдвое меньшей освещённостью; полностью тёмных мест на экране нет. Построение выполнено для случая рисунка условия, когда луч через верх фигуры успевает дойти до зеркала раньше экрана ($D\operatorname{tg}\varphi > h$).

Проверка. Второй способ — через изображение в зеркале. Отражённые лучи идут так, будто вышли из-под зеркала, а фигура с её изображением в зеркале составляют одну «двойную фигуру» высотой $2h$: сверху сама фигура, снизу её перевёрнутое отражение. Прямой пучок, падающий на эту двойную фигуру, отбрасывает на экран её тень: сама фигура даёт верхнюю, прямую часть, отражение — нижнюю, перевёрнутую. Это ровно две тени высотой h, соприкасающиеся основаниями.

Смысл. Зеркало удваивает число путей света, поэтому и теней две: одна от «настоящей» фигуры, другая от её зеркального изображения.

Ответ. Да, на экране будут видны две тени фигуры в натуральную величину (не увеличенные и не уменьшенные): прямая и под ней перевёрнутая; они соприкасаются основаниями. Ход лучей — на рисунках.