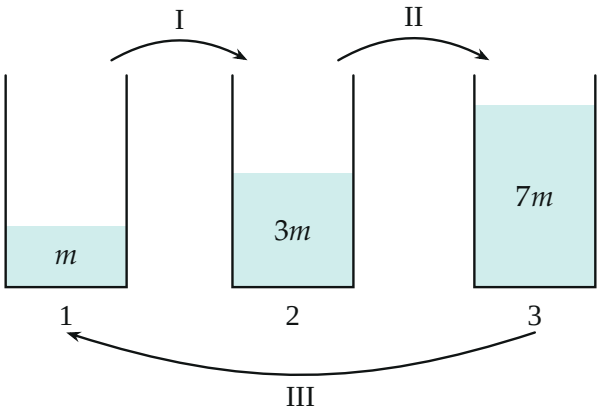
Три стакана и перелитая ложка

Задача 5. [ИОШ 2020/21, 9 класс, задача 5] Имеется три стакана с водой массой m, $3m$ и $7m$ с разными температурами. Когда ложку воды из первого стакана перелили во второй, температура воды в нём увеличилась на величину Δt. Затем такую же ложку воды из второго стакана перелили в третий, и температура воды в нём уменьшилась на величину $\Delta t/3$. После этого такую же ложку воды из третьего стакана перелили в первый. На сколько изменится температура воды в первом стакане? Потерь тепла в окружающее пространство не происходит. Теплоёмкостью стаканов пренебречь.



Поясняющий рисунок: порядок переливаний I, II, III одной и той же ложкой.

▲ **Решение. Что происходит.** Ложка обходит стаканы по кругу: из первого во второй, из второго в третий, из третьего обратно в первый. Каждый стакан один раз отдал ложку и один раз получил, поэтому *массы воды в конце те же, что в начале*: m, $3m$, $7m$. Тепло никуда не уходит, значит, суммарная внутренняя энергия воды не изменилась. Это задача на закон сохранения энергии (тепловой баланс) для системы из трёх стаканов — температуры ложек и сами переливания считать не нужно.

Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды; μ — масса ложки; Δt_1 — искомое изменение температуры первого стакана; Q_1, Q_2, Q_3 — теплота, полученная водой каждого стакана за все три переливания.

1. Конечные массы. Посчитаем массы после всех переливаний:

$$1\colon\ m-\mu+\mu=m, \qquad 2\colon\ 3m+\mu-\mu=3m, \qquad 3\colon\ 7m+\mu-\mu=7m.$$

	начало	после I	после II	после III
стакан 1	m	$m-\mu$	$m-\mu$	m
стакан 2	$3m$	$3m+\mu$	$3m$	$3m$
стакан 3	$7m$	$7m$	$7m+\mu$	$7m$

Массы воды по шагам. После третьего переливания (обведено) массы те же, что в начале.

2. Теплота, полученная вторым и третьим стаканами. Второй стакан в конце содержит прежнюю массу $3m$, а его температура выросла на Δt при первом переливании и больше не менялась (из него только зачерпнули ложку — температура оставшейся воды от этого не меняется). Внутренняя энергия воды массы $3m$ выросла на

$$Q_2 = c\cdot 3m\cdot\Delta t.$$

Третий стакан: масса в конце $7m$, температура уменьшилась на $\Delta t/3$ при втором переливании и дальше не менялась:

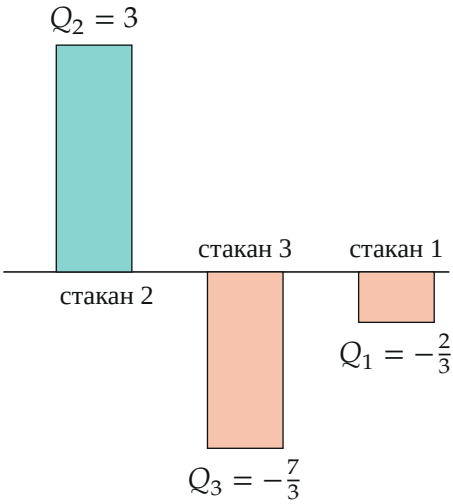
$$Q_3 = -c\cdot 7m\cdot\frac{\Delta t}{3}.$$

Знак минус — третий стакан теплоту отдал.

3. Закон сохранения энергии для трёх стаканов. Потерь нет, теплоёмкостью стаканов пренебрегаем, поэтому сумма теплот, полученных водой в трёх стаканах, равна нулю. Первый стакан в конце снова содержит массу m, и его $Q_1 = c\,m\,\Delta t_1$:

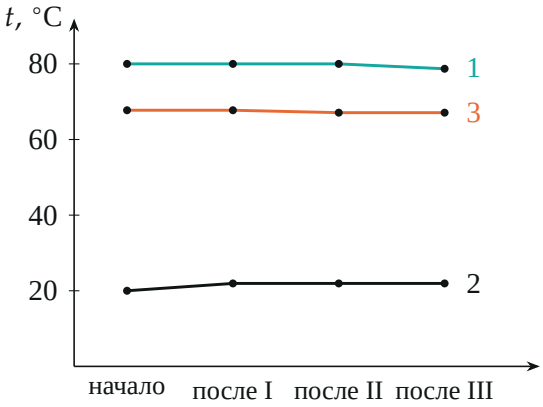
$$c\,m\,\Delta t_1 + 3c\,m\,\Delta t - \frac{7}{3}\,c\,m\,\Delta t = 0 \quad\Rightarrow\quad \Delta t_1 = -\left(3-\frac{7}{3}\right)\Delta t = -\frac{2}{3}\,\Delta t.$$

Знак минус: температура воды в первом стакане *уменьшилась* на $\frac{2}{3}\Delta t$.



Теплота, полученная водой стаканов, в единицах $c\,m\,\Delta t$: $3 - \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

4. Второй способ: прямой расчёт на числах. Выберем числа, согласованные с условием: $m = 1$ кг, $\mu = 0{,}1$ кг, температуры первого и второго стаканов 80°C и 20°C. Уравнение теплового баланса при смешивании даёт после I: $\Delta t = \dfrac{\mu\,(80-20)}{3m+\mu} \approx 1{,}935°$, второй стакан 21,935°C. Чтобы при II третий стакан остыл ровно на $\Delta t/3$, его температура должна быть 67,742°C; после II она 67,097°C. После III в первом стакане $\dfrac{0{,}9\cdot 80 + 0{,}1\cdot 67{,}097}{1} = 78{,}710$°C, то есть изменение $-1{,}290° = -\frac{2}{3}\cdot 1{,}935°$ — совпадает.



Температуры стаканов в числовом примере. Изменения малы (≈ 2°, 0,6°, 1,3°), поэтому на графике — небольшие ступеньки.

Обратите внимание: нельзя считать, что температура второго стакана менялась ещё раз, когда из него взяли ложку: отбор части воды температуру оставшейся воды не меняет. Поэтому изменения Δt и $-\Delta t/3$ — окончательные.

Проверка. Размерность: Δt_1 — в градусах, как Δt. Результат не зависит ни от массы ложки, ни от начальных температур — это видно и из числового примера. Знак: третий стакан остыл, второй нагрелся сильнее ($3 > \frac{7}{3}$), значит, первый должен остыть, чтобы энергия сохранилась.

Смысл. Когда массы вернулись к исходным, вся «история» переливаний не важна: сумма $m_i \Delta t_i$ по стаканам равна нулю.

Ответ. Температура воды в первом стакане уменьшится на $\frac{2}{3}\Delta t$ ($\Delta t_1 = -\frac{2}{3}\Delta t$).