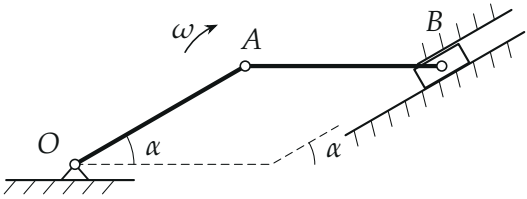
# Кривошипно-шатунный механизм

**Задача 6.** [ИОШ 2020/21, 9 класс, задача 6] Кривошипно-шатунный механизм состоит из двух стержней $OA$ (кривошип) и $AB$ (шатун), которые движутся следующим образом. Кривошип вращается с угловой скоростью $\omega$ вокруг точки $O$, шатун в точке $A$ шарнирно связан с кривошипом, в точке $B$ — с ползуном, который движется в направляющих, образующих угол $\alpha$ с горизонтом. Найти угловую скорость шатуна $AB$ в тот момент времени, когда угол между кривошипом и горизонтом равен $\alpha = 30°$ (см. рисунок). $AB = OA$.




▲ **Решение. Что происходит.** Кривошип вращается вокруг неподвижной точки $O$, поэтому скорость его конца $A$ известна целиком: величина $\omega l$, направление — перпендикулярно $OA$. Шатун $AB$ — твёрдый стержень, и про его конец $B$ известно только направление скорости: вдоль направляющих. Это задача кинематики твёрдого тела с двумя стандартными приёмами: (1) проекции скоростей концов нерастяжимого стержня на сам стержень равны; (2) скорости точек вращающегося стержня, перпендикулярные ему, растут линейно с расстоянием до точки, которая в данный момент неподвижна (мгновенного центра скоростей).

**Обозначения.** $l = OA = AB$; $\vec{v}$ — скорость точки $A$, $v = \omega l$; $\vec{v}_1$ — скорость ползуна $B$; $\omega_{AB}$ — искомая угловая скорость шатуна; ось $x$ — вдоль шатуна от $A$ к $B$ (в этот момент шатун горизонтален), ось $y$ — вверх. Считаем, что кривошип вращается против часовой стрелки (как на рисунке условия).

**1. Скорость точки $A$.** Точка $A$ движется по окружности радиуса $l$ с центром $O$:

$$v = \omega l, \qquad \vec{v} \perp OA.$$

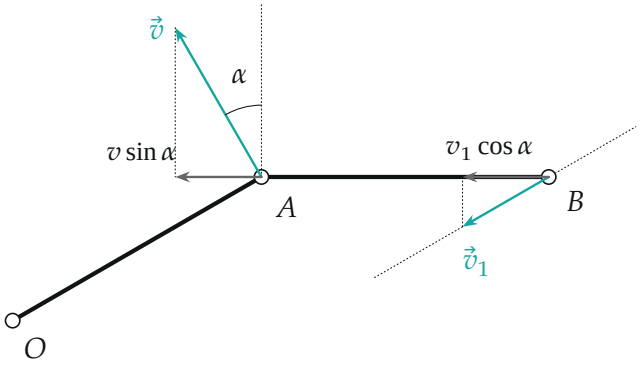
$OA$ составляет с горизонтом угол $\alpha$, значит, $\vec{v}$ составляет с вертикалью угол $\alpha$, а с шатуном $AB$ — угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (на рисунке ниже). Проекции:

$$v_x = -v\sin\alpha, \qquad v_y = v\cos\alpha.$$

**2. Скорость ползуна из нерастяжимости шатуна.** Расстояние $AB$ не меняется, поэтому проекции скоростей концов на прямую $AB$ (на ось $x$) одинаковы. Скорость $\vec{v}_1$ направлена вдоль направляющих, под углом $\alpha$ к $AB$:

$$v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = v_1\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_1 = v\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\omega l}{\sqrt{3}}.$$

Проекция $v_x$ отрицательна, значит, ползун едет *вниз* по направляющим.



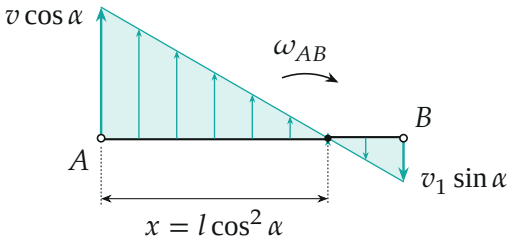

*Скорости концов шатуна (в масштабе, $v_1 = v\,\mathrm{tg}\,30°$). Серые стрелки — проекции на шатун, они равны: $v\sin\alpha = v_1\cos\alpha$.*

**3. Поворот шатуна: поперечные скорости.** Разность скоростей концов твёрдого стержня перпендикулярна ему — это и есть вращение. Поперечные (вдоль $y$) составляющие: у $A$ вверх $v\cos\alpha$, у $B$ вниз $v_1\sin\alpha$. Концы движутся поперёк стержня в разные стороны, поэтому

$$\omega_{AB} = \frac{v\cos\alpha + v_1\sin\alpha}{l} = \frac{v}{l}\cdot\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\omega \approx 1{,}15\,\omega.$$

Точка $A$ идёт вверх, $B$ — вниз: шатун поворачивается *по часовой стрелке*, навстречу вращению кривошипа. Поперечная скорость точек шату-

на меняется по прямой и обращается в ноль на расстоянии $x$ от $A$, где $\dfrac{v\cos\alpha}{x} = \dfrac{v_1\sin\alpha}{l-x}$, то есть $x = l\cos^2\alpha = \frac{3}{4}l$.

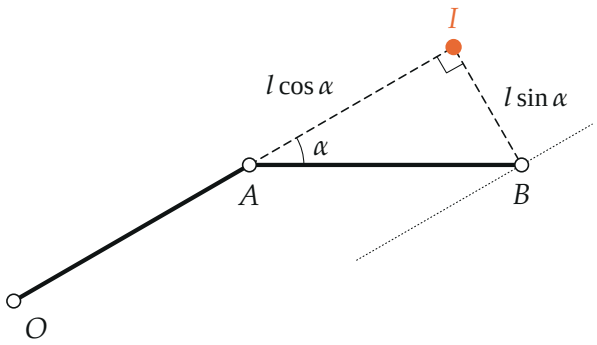



*Поперечные (перпендикулярные шатуну) скорости его точек: прямая линия, ноль в точке на расстоянии $\frac{3}{4}l$ от $A$. Шатун поворачивается вокруг неё по часовой стрелке.*

**4. Второй способ: мгновенный центр скоростей.** Мгновенный центр $I$ шатуна лежит на перпендикулярах к скоростям его концов: на прямой $OA$ (так как $\vec{v} \perp OA$) и на перпендикуляре к направляющим через $B$. Треугольник $AIB$ прямоугольный (угол при $I$ прямой: прямая $OA$ параллельна направляющим, обе под углом $\alpha$ к горизонтали), угол при $A$ равен $\alpha$, гипотенуза $AB = l$:

$$AI = l\cos\alpha, \qquad BI = l\sin\alpha, \qquad \omega_{AB} = \frac{v}{AI} = \frac{\omega l}{l\cos\alpha} = \frac{\omega}{\cos\alpha}.$$

Заодно $v_1 = \omega_{AB}\cdot BI = \omega l\,\mathrm{tg}\,\alpha$ — как в пункте 2.



*Мгновенный центр скоростей $I$ шатуна (построен по точкам): пересечение продолжения $OA$ и перпендикуляра к направляющим из $B$.*

Обратите внимание: угловая скорость шатуна не равна $\omega$ и не меньше её, хотя длины стержней одинаковы: точка $B$ не стоит на месте, и шатун поворачивается вокруг $I$, а не вокруг $B$.

**Проверка.** Размерность: $\omega/\cos\alpha$ — рад/с. Предел $\alpha \to 0$ (направляющие горизонтальны, кривошип горизонтален): $\omega_{AB} \to \omega$; тогда $\vec{v}_1 = 0$, $B$ неподвижен, $A$ движется вертикально со скоростью $\omega l$ на расстоянии $l$ от $B$ — и правда $\omega_{AB} = \omega$. Два способа (поперечные скорости и мгновенный центр) дали одно и то же.

**Смысл.** В этом положении шатун поворачивается быстрее кривошипа в $2/\sqrt{3} \approx 1{,}15$ раза и в противоположную сторону.

**Ответ.** $\omega_{AB} = \dfrac{\omega}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\omega \approx 1{,}15\,\omega$; шатун вращается в сторону, противоположную вращению кривошипа.