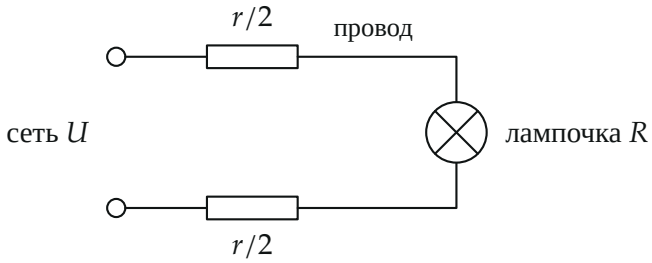
Лампочка в настольной лампе

Задача 1. [ИОШ 2021/22, 10 класс, задача 1] Когда в настольную лампу, рассчитанную на работу в бытовой электрической сети, вставили лампочку номинальной мощностью $P_1 = 60$ Вт, оказалось, что в соединительных проводах лампы выделяется мощность $P_2 = 10$ мВт. Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов по сравнению с сопротивлением лампочки, найти, какая мощность будет выделяться в соединительных проводах при использовании лампочки номинальной мощностью $P_3 = 100$ Вт.



Поясняющий рисунок: лампочка подключена к сети двумя соединительными проводами, их общее сопротивление r много меньше сопротивления лампочки R.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Провода и лампочка соединены последовательно, по ним течёт один и тот же ток. Провода «тонкие» по сопротивлению ($r \ll R$), поэтому почти всё напряжение сети приходится на лампочку, и она работает в номинальном режиме. Тогда ток задаётся номинальной мощностью лампочки, а мощность в проводах — законом Джоуля–Ленца I^2r. Это задача на последовательную цепь и закон Джоуля–Ленца.

Обозначения. U — напряжение сети; r — сопротивление проводов (одно и то же в обоих случаях: провода лампы не меняются); I_1, I_3 — токи с лампочками 60 и 100 Вт; P_4 — искомая мощность в проводах со второй лампочкой.

1. Напряжение на лампочке. Ток в цепи $I = U/(R+r)$, напряжение на лампочке $U_л = IR = U\dfrac{R}{R+r} \approx U$ при $r \ll R$. Значит, на лампочке напряжение сети, и в ней выделяется её номинальная мощность.

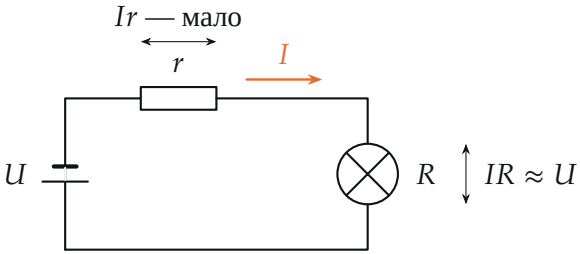


Схема: провода (сопротивление r) и лампочка R последовательно, ток I один; на проводах падает малая доля напряжения, на лампочке — почти всё U.

2. Ток через номинальную мощность. Мощность в лампочке $P = UI$ (закон Джоуля–Ленца в форме $P = UI$ при напряжении U на ней), поэтому

$$I_1 = \frac{P_1}{U}, \qquad I_3 = \frac{P_3}{U}.$$

Чем мощнее лампочка, тем меньше её сопротивление $R = U^2/P$ и тем больше ток.

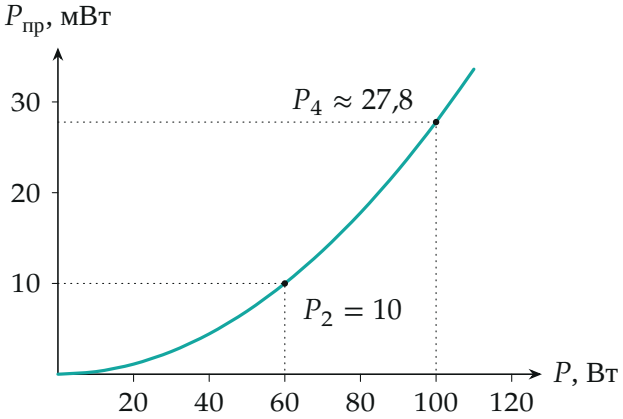
3. Мощность в проводах. По закону Джоуля–Ленца для проводов

$$P_2 = I_1^2 r = \frac{P_1^2}{U^2} r, \qquad P_4 = I_3^2 r = \frac{P_3^2}{U^2} r.$$

Делим второе на первое: неизвестные U и r сокращаются,

$$\frac{P_4}{P_2} = \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad P_4 = P_2 \frac{P_3^2}{P_1^2} = 10\text{ мВт} \cdot \left(\frac{100}{60}\right)^2 \approx 27{,}8\text{ мВт}.$$

Мощность в проводах растёт как квадрат мощности лампочки: ток вырос в $5/3$ раза, потери — в $25/9$ раза.

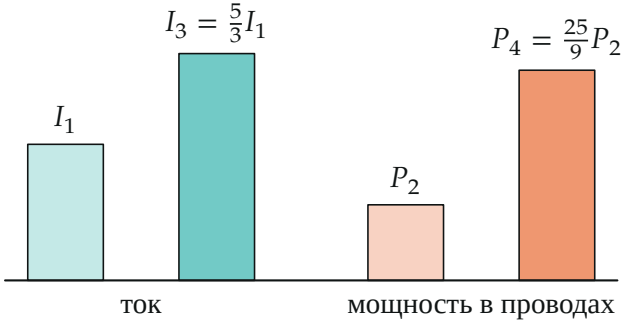


Мощность в проводах в зависимости от номинальной мощности лампочки: парабола $P_{пр} = P_2\,(P/P_1)^2$ через точку (60 Вт; 10 мВт).

Обратите внимание. Сопротивление проводов r одно и то же, а не мощность: провода у лампы прежние, меняется лампочка. Поэтому мощность в проводах не пропорциональна мощности лампочки, а растёт как её квадрат.

Ответ. $P_4 = P_2\,\dfrac{P_3^2}{P_1^2} \approx 27{,}8$ мВт.

Проверка. Размерность: мВт·(Вт/Вт)^2 = мВт. Второй способ — через сопротивления. Пусть $U = 220$ В: $I_1 = 60/220 \approx 0{,}273$ А, $r = P_2/I_1^2 \approx 0{,}134$ Ом (много меньше $R_1 = U^2/P_1 \approx 807$ Ом — приближение законно); $I_3 = 100/220 \approx 0{,}455$ А, $P_4 = I_3^2 r \approx 0{,}0278$ Вт. Ответ от U не зависит. Поправка за счёт падения напряжения на проводах — порядка $r/R \sim 10^{-4}$, она не видна в трёх знаках.



Ток растёт в $5/3$ раза (как мощность лампочки), а потери в проводах — в $(5/3)^2 = 25/9$ раза.

Физический смысл. Мощная лампочка потребляет больший ток, а потери в проводах квадратичны по току; поэтому для мощных потребителей берут провода толще.

Ответ. $P_4 = P_2 \dfrac{P_3^2}{P_1^2} \approx 27{,}8$ мВт.