Цилиндр с нитью на наклонной плоскости

Задача 3. [ИОШ 2021/22, 10 класс, задача 3] На однородный цилиндр радиуса R и массы M намотана невесомая нить, к концу которой привязано тело массы m. Цилиндр аккуратно кладут на наклонную плоскость, по которой он может катиться без проскальзывания, так, что его образующая перпендикулярна направлению быстрейшего спуска с плоскости (см. рисунок). При каком угле наклона плоскости α цилиндр будет двигаться вверх по плоскости?

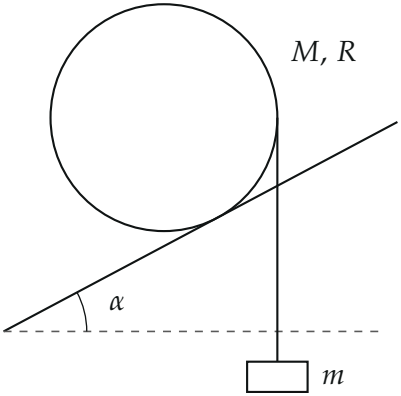


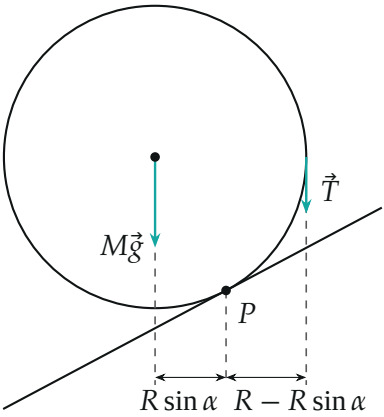
Рисунок условия. Нить сходит с цилиндра по вертикали в его самой правой точке и пересекает плоскость (на рисунке организаторов так же); считаем, что плоскость нити не мешает.

▲ **Решение. Что происходит.** Цилиндр лежит на наклонной плоскости: его вес стремится скатить его вниз. Но нить с грузом тянет цилиндр вниз вертикально в точке, которая лежит выше по склону от точки касания: груз, опускаясь, раскручивает цилиндр в сторону подъёма. Если груз «перевешивает», цилиндр катится вверх; если нет — вниз. Главная идея: сравнить моменты двух сил относительно точки касания цилиндра с плоскостью. Это задача на вращение (качение без проскальзывания) вокруг мгновенной оси.

Обозначения. M — масса цилиндра, P — точка касания цилиндра с плоскостью, T — сила натяжения нити. Моменты считаем относительно

P. Зачем именно P: цилиндр катится без проскальзывания, и в каждый момент он поворачивается вокруг P; сила трения и сила нормальной реакции приложены в самой точке P, их моменты равны нулю, и неизвестные $F_{\text{тр}}$ и N в уравнение не попадают.

1. Плечи сил. На цилиндр действуют сила тяжести $M\vec{g}$ (из центра), сила нормальной реакции, сила трения и сила натяжения $\vec{T}$ нити (вертикально вниз из самой правой точки цилиндра). Центр цилиндра лежит на нормали к плоскости, проведённой через P; значит, по горизонтали от P до центра $R\sin\alpha$ — это плечо силы тяжести (центр левее P). Нить касается цилиндра справа, на расстоянии R по горизонтали от центра, поэтому по горизонтали от P до нити $R - R\sin\alpha$ — плечо силы T.



Плечи сил относительно точки касания P: $R\sin\alpha$ у силы тяжести и $R - R\sin\alpha$ у силы натяжения (рисунок для $\alpha = 28°$).

Сила тяжести стремится повернуть цилиндр против часовой стрелки (катить вниз по склону), сила натяжения — по часовой (вверх по склону).

2. Условие подъёма. Груз неподвижен в начале движения, а граничный случай — равновесие, поэтому в нём $T = mg$ (позже мы проверим, что знак ускорения определяется именно этим условием). Цилиндр поедет вверх, когда момент силы натяжения больше момента силы тяжести:

$$mg\,(R - R\sin\alpha) > Mg\,R\sin\alpha.$$

Радиус R сокращается:

$$m(1-\sin\alpha) > M\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha < \frac{m}{M+m}.$$

Обратите внимание: ответ не зависит от радиуса и от момента инерции цилиндра; при $\sin\alpha = m/(M+m)$ моменты равны, цилиндр стоит в равновесии. Для примера на рисунках ниже взято $M = 4m$: тогда $\sin\alpha < 1/5$, $\alpha < 11{,}5°$.

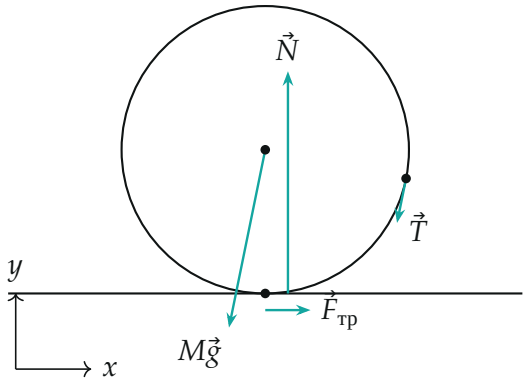
Проверка динамикой. Покажем, что для ускорения знак даёт то же условие. Пусть a — ускорение оси цилиндра вверх по склону, $\varepsilon = a/R$. Из второго способа ниже: при повороте на θ груз опускается на $R\theta(1-\sin\alpha)$, поэтому его ускорение вниз равно $a(1-\sin\alpha)$. Моменты относительно P при $I_P = \frac{3}{2}MR^2$ (момент инерции цилиндра относительно образующей, по теореме Штейнера) и второй закон для груза дают

$$\tfrac{3}{2}MR\,\varepsilon = T\,(1-\sin\alpha) - Mg\sin\alpha, \qquad m\,a\,(1-\sin\alpha) = mg - T.$$

Подставим T из второго уравнения в первое и учтём $a = R\varepsilon$:

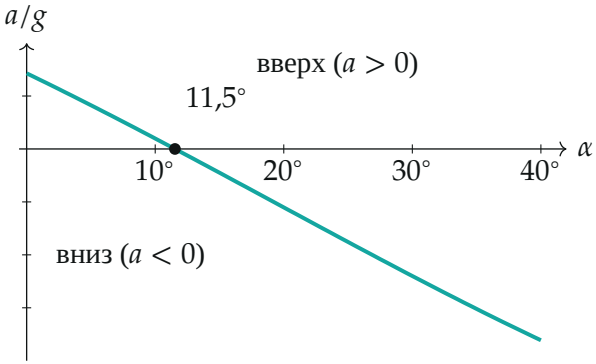
$$a = g\,\frac{m(1-\sin\alpha) - M\sin\alpha}{\frac{3}{2}M + m(1-\sin\alpha)^2}.$$

При $M = 4m$ это $a = g\,\dfrac{1-5\sin\alpha}{6+(1-\sin\alpha)^2}$.



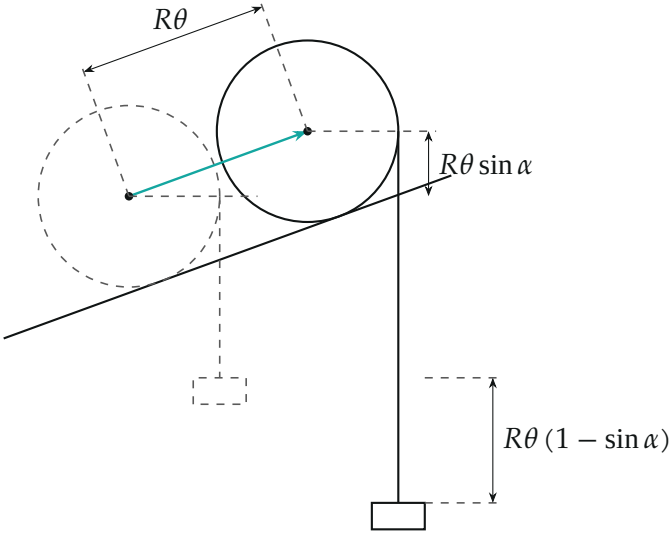
Силы, действующие на цилиндр, в системе с осью x вдоль плоскости (рисунок для $M = 4m$ и граничного угла $\sin\alpha = 1/5$: длины сил пропорциональны модулям, $T = mg$).

Числитель положителен, пока $\sin\alpha < m/(M+m)$. График для $M = 4m$: при $\alpha = 0$ получаем $a = g/7$.



Ускорение оси цилиндра вверх по склону при $M = 4m$: выше нуля при $\alpha < 11{,}5°$.

Второй способ: энергия. Цилиндр катится без проскальзывания, трение работы не совершает, а система имеет одну степень свободы — угол поворота θ. Пусть цилиндр повернулся на θ в сторону подъёма. Ось поднялась по склону на $R\theta$, то есть на высоту $R\theta\sin\alpha$; нить размоталась на $R\theta$, а точка её схода поднялась на $R\theta\sin\alpha$, поэтому груз опустился на $R\theta(1-\sin\alpha)$.



Поворот цилиндра на $\theta = 120°$ (пунктир — начальное положение): ось сместилась на $R\theta$ вдоль склона, груз опустился на $R\theta(1-\sin\alpha)$.

Изменение потенциальной энергии системы:

$$\Delta U = Mg\,R\theta\sin\alpha - mg\,R\theta\,(1-\sin\alpha) = gR\theta\,((M+m)\sin\alpha - m).$$

Цилиндр поедет вверх, если $\Delta U < 0$ при $\theta > 0$, то есть при $\sin\alpha < m/(M+m)$ — тот же результат.

Проверка. Размерность: $\sin\alpha$ безразмерен. При $m \to 0$ нити нет, цилиндр не может подниматься ни при каком $\alpha > 0$: $\sin\alpha < 0$. При $m \to \infty$ (тяжёлый груз) $\sin\alpha < 1$: подъём возможен почти при любом угле — ожидаемо. Физический смысл: $\sin\alpha = \dfrac{m}{M+m}$ — вес груза делён на суммарный вес.

Ответ. $\sin\alpha < \dfrac{m}{M+m}$, то есть $\alpha < \arcsin\dfrac{m}{M+m}$ (при равенстве — равновесие); радиус цилиндра в ответ не входит.