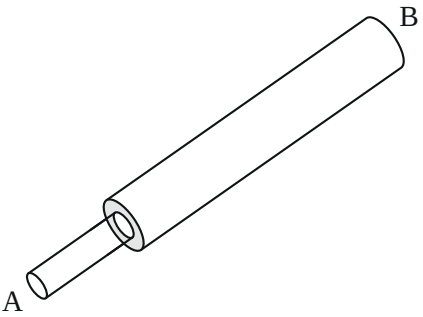
Сваренные стержни и выравнивание температуры

Задача 4. [ИОШ 2021/22, 10 класс, задача 4] Тело сварено из двух стержней одного и того же материала. Радиусы поперечных сечений стержней отличаются вдвое, длина более толстого стержня втрое больше длины более узкого (см. рисунок). Тело нагрето так, что его температура меняется по линейному закону от значения T на тонком конце A до значения $2T$ на конце B. Найти температуру тела после установления равновесия. Потерями тепла в окружающее пространство пренебречь.



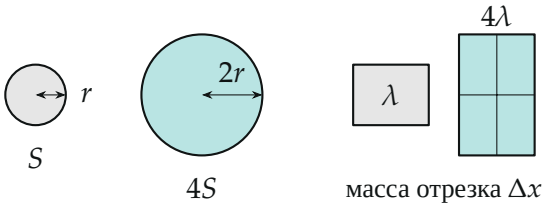
▲ **Решение. Что происходит.** Тело теплоизолировано, поэтому тепло только перераспределяется между частями: горячие участки остывают, холодные нагреваются, пока температура всюду не станет одной, T_x. Уравнение теплового баланса говорит, что T_x — средняя температура, «взвешенная» по массам участков. Тонкость в том, что толстый стержень не только длиннее, но и тяжелее на единицу длины: радиус вдвое больше — сечение и масса единицы длины вчетверо больше. Это задача на тепловой баланс с непрерывно распределённой температурой.

Обозначения. l — длина тонкого стержня (толстого — $3l$); λ — масса единицы длины тонкого стержня; c — удельная теплоёмкость материала; x — расстояние от конца A вдоль тела; $T(x)$ — начальная температура; T_x — установившаяся температура.

1. Масса единицы длины. Материал один, плотность ρ одна. Масса единицы длины $\rho\pi r^2$, при радиусе вдвое больше она в $2^2 = 4$ раза

больше: у толстого стержня 4λ. Массы стержней:

$$m_{\text{т}} = \lambda l, \qquad m_{\text{Т}} = 4\lambda \cdot 3l = 12\lambda l, \qquad m = m_{\text{т}} + m_{\text{Т}} = 13\lambda l.$$



Сечения стержней: при радиусе вдвое больше площадь сечения, а с ней и масса единицы длины, вчетверо больше.

2. Начальная температура. Температура линейна по длине всего тела $4l$, от T при $x = 0$ до $2T$ при $x = 4l$:

$$T(x) = T + \frac{T}{4l}\,x.$$

В месте сварки ($x = l$) $T(l) = \frac{5}{4}T$. Тонкий стержень нагрет от T до $\frac{5}{4}T$, толстый — от $\frac{5}{4}T$ до $2T$.

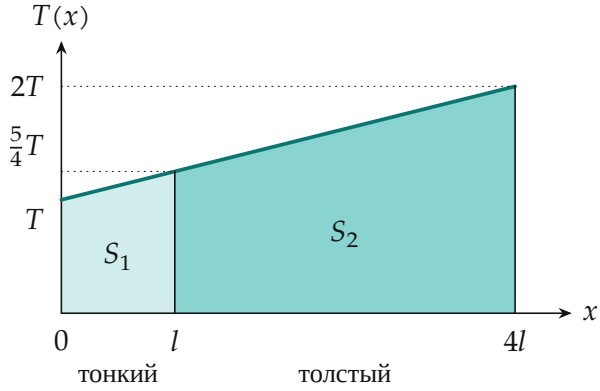
3. Тепловой баланс. Разобьём тело на тонкие слои массами Δm_i с температурами T_i. Тепло никуда не уходит, поэтому сумма теплот, полученных всеми слоями, равна нулю:

$$\sum_i c\,\Delta m_i\,(T_x - T_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_x = \frac{\sum_i \Delta m_i T_i}{m}.$$

Масса слоя $\Delta m_i = \lambda \Delta x_i$ в тонком стержне и $4\lambda\Delta x_i$ в толстом, поэтому

$$m\,T_x = \lambda \sum_{\text{тонк}} T_i \Delta x_i + 4\lambda \sum_{\text{толст}} T_i \Delta x_i.$$

Каждая сумма $\sum T_i \Delta x_i$ — это площадь под графиком $T(x)$ на своём участке (так же, как работа переменной силы — площадь под графиком $F(x)$).



Начальная температура вдоль тела: S_1 — площадь под графиком на тонком стержне, S_2 — на толстом. В баланс S_2 входит с весом 4, потому что толстый стержень вчетверо тяжелее на единицу длины.

4. Площади. Под графиком — трапеции:

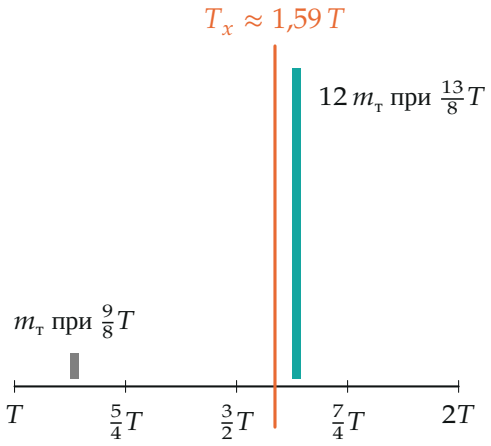
$$S_1 = \frac{T + \frac{5}{4}T}{2} \cdot l = \frac{9}{8}Tl, \qquad S_2 = \frac{\frac{5}{4}T + 2T}{2} \cdot 3l = \frac{13}{8}T \cdot 3l = \frac{39}{8}Tl.$$

Тогда

$$13\lambda l\, T_x = \lambda \cdot \frac{9}{8}Tl + 4\lambda \cdot \frac{39}{8}Tl = \frac{165}{8}\lambda Tl \quad \Rightarrow \quad T_x = \frac{165}{104}T \approx 1{,}59\,T.$$

5. Второй способ — через средние температуры стержней. Для однородного стержня с линейной температурой площадь под графиком равна (средняя температура)×(длина), поэтому сам по себе он пришёл бы к полусумме температур концов: тонкий — к $\frac{9}{8}T$, толстый — к $\frac{13}{8}T$. Затем два стержня обмениваются теплом как два тела массами $m_\text{т}$ и $m_\text{Т} = 12m_\text{т}$:

$$T_x = \frac{1 \cdot \frac{9}{8}T + 12 \cdot \frac{13}{8}T}{1 + 12} = \frac{9 + 156}{104}T = \frac{165}{104}T.$$



Средневзвешенная: столбики — массы стержней в точках их средних температур; T_x — «центр масс» этой картинки, близко к толстому стержню, потому что он в 12 раз тяжелее.

Обратите внимание. Ответ — не средняя температура по длине ($\frac{3}{2}T$): равным длинам соответствуют разные массы. И масса единицы длины толстого стержня больше в 4 раза (как квадрат радиуса), а не в 2.

Ответ. $T_x = \dfrac{165}{104}\,T \approx 1{,}59\,T$.

Проверка. Ответ лежит между T и $2T$ и между $\frac{9}{8}T$ и $\frac{13}{8}T$, ближе к последней — толстый стержень тяжелее. Если бы стержни были одинаковой толщины, получилось бы $\frac{3}{2}T$ (середина), а у нас больше: горячая часть тела массивнее. Численно (python, 2000 слоёв): $T_x = 1{,}5865\,T$, совпадает с $165/104 = 1{,}5865$.

Физический смысл. Установившаяся температура теплоизолированного тела — средняя по массе начальная температура; толстая горячая часть «перетягивает» результат к себе.

Ответ. $T_x = \dfrac{165}{104}\,T \approx 1{,}59\,T$.