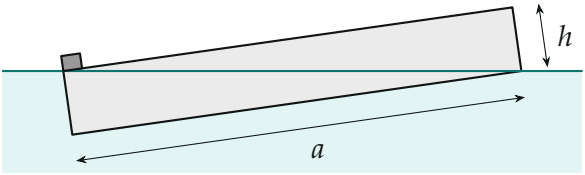
Квадратный плот с точечным грузом

Задача 5. [ИОШ 2021/22, 10 класс, задача 5] С помощью квадратного плота плотности ρ перевозят грузы. Точечный груз ставят на самый край плота, и плот занимает такое положение, что его противоположные края оказываются на поверхности воды (см. рисунок).



1. Найти отношение высоты плота h к его ширине a. Плотность воды ρ_0 известна.
2. При любой ли плотности плота ρ его можно расположить в воде так, как показано на рисунке (при некоторой массе груза)?

▲ **Решение. Что происходит.** Плот в равновесии, поэтому одновременно выполняются два условия: сумма сил равна нулю и сумма моментов равна нулю. Положение «противоположные края на поверхности» означает, что линия воды идёт по диагонали сечения плота: погружена ровно половина объёма, и погружённая часть — прямоугольный треугольник. Условие сил даёт массу груза через плотности, условие моментов — через форму плота (h/a); приравняв, найдём h/a. Это задача на равновесие плавающего тела (закон Архимеда + правило моментов).

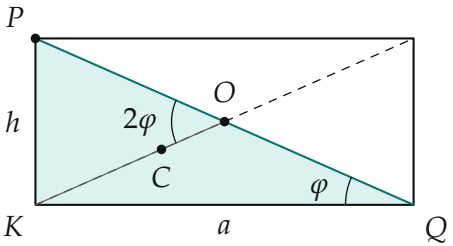
Обозначения. $V = a^2h$ — объём плота, $M = \rho V$ — его масса, m — масса груза; O — центр плота (там приложена сила тяжести плота); P — край плота с грузом; K и Q — нижние углы сечения; $d = \sqrt{a^2 + h^2}$ — диагональ сечения; φ — угол между диагональю и нижней гранью, $\operatorname{tg}\varphi = h/a$; C — центр погружённой части (точка приложения силы Архимеда F_A).

Пункт 1.

1. Где линия воды и где приложена сила Архимеда. Вершины P и Q лежат на поверхности, значит, линия воды — диагональ PQ; она проходит через центр O. Под водой — треугольник PKQ, половина сечения,

поэтому $V_{\text{п.ч.}} = V/2$. Сила Архимеда приложена к центру масс погружённого объёма — точке пересечения медиан треугольника PKQ. Медиана KO из вершины прямого угла равна половине гипотенузы, $KO = d/2$, а точка пересечения медиан делит её 2 : 1 от вершины, поэтому

$$OC = \frac{1}{3}\,KO = \frac{d}{6}.$$

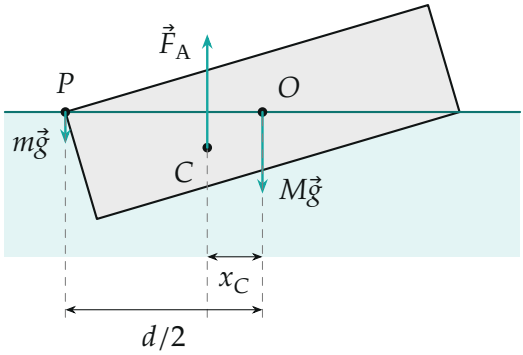


Сечение плота в его собственной системе: линия воды — диагональ PQ, погружённая часть — треугольник PKQ (заливка); центр C лежит на медиане KO на расстоянии $d/6$ от O. Угол между диагоналями равен 2φ.

2. Плечи сил относительно O. Моменты считаем относительно центра плота O: так сила тяжести плота выпадает из уравнения. Линия воды горизонтальна, поэтому плечо — проекция на неё. Груз в точке P на линии воды: плечо $OP = d/2$. Точка C лежит на второй диагонали OK, которая составляет с линией воды угол 2φ (угол между диагоналями прямоугольника вдвое больше угла между диагональю и стороной): плечо силы Архимеда

$$x_C = OC\cos 2\varphi = \frac{d}{6}\cos 2\varphi.$$

Груз и точка C — по одну сторону от O: груз поворачивает плот вниз, сила Архимеда — вверх.



Силы, действующие на плот (пример $\rho = 0{,}36\,\rho_0$, длины стрелок пропорциональны модулям): $M\vec{g}$ в центре O, $\vec{F}_A$ в центре C погружённой части, $m\vec{g}$ на краю P. Плечи относительно O: $d/2$ у груза и x_C у силы Архимеда.

3. Условие сил. Второй закон Ньютона для плота с грузом в проекции на вертикаль (ускорения нет):

$$\rho_0 g\,\frac{V}{2} - \rho g V - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \Big(\frac{\rho_0}{2} - \rho\Big)V.$$

4. Условие моментов относительно O:

$$mg\,\frac{d}{2} = \rho_0 g\,\frac{V}{2}\cdot\frac{d}{6}\cos 2\varphi \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\rho_0 V}{6}\cos 2\varphi.$$

Выразим $\cos 2\varphi$ через стороны: $\cos\varphi = a/d$, $\sin\varphi = h/d$,

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{a^2 - h^2}{a^2 + h^2} = \frac{1 - z}{1 + z}, \qquad z = \frac{h^2}{a^2}.$$

5. Приравниваем две массы груза:

$$\Big(\frac{\rho_0}{2} - \rho\Big)V = \frac{\rho_0 V}{6}\cdot\frac{1 - z}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - z}{1 + z} = \frac{3(\rho_0 - 2\rho)}{\rho_0}.$$

Решаем относительно z: $(1 - z)\rho_0 = 3(\rho_0 - 2\rho)(1 + z)$, $z\,(4\rho_0 - 6\rho) = 6\rho - 2\rho_0$,

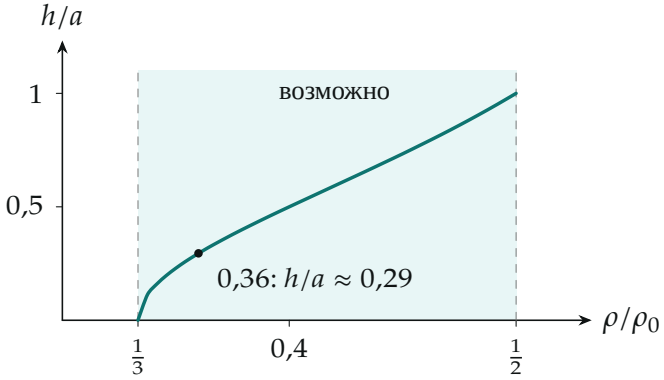
$$z = \frac{3\rho - \rho_0}{2\rho_0 - 3\rho}, \qquad \frac{h}{a} = \sqrt{\frac{3\rho - \rho_0}{2\rho_0 - 3\rho}}.$$

Пункт 2.

6. Когда такое положение возможно. Нужны два условия. Масса груза положительна: из шага 3 $\rho < \rho_0/2$ (без груза плот погружён меньше чем наполовину — иначе груз не нужен, а «отрицательный» груз не поставить). Подкоренное выражение положительно: знаменатель $2\rho_0 - 3\rho > 0$ при $\rho < \rho_0/2$ выполняется сам, числитель $3\rho - \rho_0 > 0$ даёт $\rho > \rho_0/3$. Итого

$$\frac{\rho_0}{3} < \rho < \frac{\rho_0}{2}.$$

При $\rho \le \rho_0/3$ не поможет никакой груз: плот слишком лёгкий, и сила Архимеда половины объёма так велика, что груз, нужный по силам, не может уравновесить её момент. На границах: $\rho \to \rho_0/3$ — $h/a \to 0$ (тонкий плот), $\rho \to \rho_0/2$ — $h/a \to 1$ и $m \to 0$.



Отношение h/a в зависимости от плотности плота: положение из условия возможно только в полосе $\rho_0/3 < \rho < \rho_0/2$.

Обратите внимание. Сила Архимеда приложена не к центру плота и не к середине погружённой грани, а к центру масс погружённого треугольника. И плечи считаются по горизонтали (вдоль линии воды), а не вдоль плота.

Ответ. 1) $\dfrac{h}{a} = \sqrt{\dfrac{3\rho - \rho_0}{2\rho_0 - 3\rho}}$; 2) нет, только при $\dfrac{\rho_0}{3} < \rho < \dfrac{\rho_0}{2}$.

Проверка. Размерность: отношение плотностей безразмерно. Числом (python): при $\rho = 0{,}36\rho_0$, $a = 1$ получаем $h = 0{,}295$,

$m = 0{,}14\,\rho_0 V$; моменты относительно O: $m\,d/2 = 0{,}0730\,\rho_0 V$·ед. и $\frac{1}{2}\rho_0 V \cdot x_C = 0{,}0730\,\rho_0 V$·ед. — совпадают. Второй способ для плеча x_C — координаты: в системе плота $C = (-a/6,\ -h/6)$, проекция на направление линии воды $(a, -h)/d$ даёт $(h^2 - a^2)/(6d)$, по модулю $\frac{d}{6}\cos 2\varphi$.

Физический смысл. Груз на краю наклоняет плот, а сила Архимеда, сместившаяся в погружённую часть, выпрямляет его; равновесие с линией воды по диагонали возможно лишь при плотности плота от трети до половины плотности воды.

Ответ. 1) $\dfrac{h}{a} = \sqrt{\dfrac{3\rho - \rho_0}{2\rho_0 - 3\rho}}$; 2) нет, только при $\dfrac{\rho_0}{3} < \rho < \dfrac{\rho_0}{2}$.