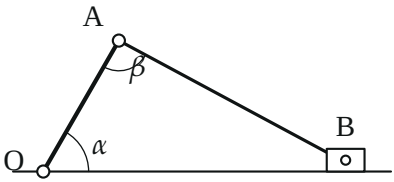
Кривошипно-шатунный механизм в равновесии

Задача 6. [ИОШ 2021/22, 10 класс, задача 6] Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа OA (стержня, прикрепленного к шарниру O), шатуна AB (стержня, шарнирно прикрепленного к кривошипу в точке A) и ползуна B (точечной детали, способной перемещаться вдоль поверхности и шарнирно связанной с шатуном). Известно, что механизм находится в равновесии в положении, показанном на рисунке. Найти коэффициент трения между ползуном и поверхностью, если $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, массы кривошипа и шатуна одинаковы, масса ползуна пренебрежимо мала.



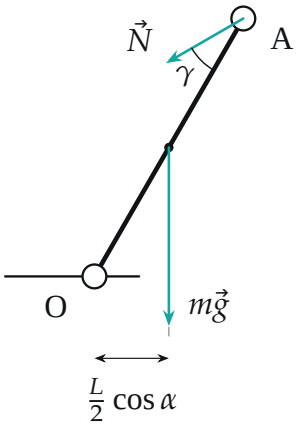
▲ **Решение. Что происходит.** Механизм неподвижен, значит, в равновесии каждое звено отдельно: и кривошип, и шатун. Главная неизвестная — сила, с которой звенья давят друг на друга в шарнире A: про её направление заранее ничего сказать нельзя (шарнир передаёт силу в любом направлении, а стержни ещё и весомые). Её найдём из двух уравнений моментов, после чего равновесие сил шатуна даст силу трения и силу реакции в точке B. Ползун не скользит — трение покоя не больше μN_1. Это задача на равновесие системы тел (статика со связями и трением).

Обозначения. m — масса кривошипа и шатуна; $OA = L$; $\vec{N}$ — сила, с которой шатун действует на кривошип в шарнире A, γ — угол между ней и кривошипом; по третьему закону Ньютона кривошип действует на шатун силой $-\vec{N}$; $\vec{N}_1$ — сила нормальной реакции поверхности, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения покоя на ползун. Ось x — вдоль поверхности вправо, y — вверх.

1. Геометрия. Шатун перпендикулярен кривошипу ($\beta = 90°$), поэтому шатун наклонён к горизонтали под углом $90° - \alpha = 30°$. Из прямоугольного треугольника OAB: $OB = L/\cos\alpha = 2L$, $AB = L\,\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}\,L$.

2. Моменты для кривошипа относительно O. Зачем точка O: неизвестная сила шарнира O проходит через неё и в уравнение не входит. На кривошип действуют сила тяжести $m\vec{g}$ (в середине, плечо $\frac{L}{2}\cos\alpha$) и сила $\vec{N}$ в точке A (плечо $L\sin\gamma$). Правило моментов:

$$mg\,\frac{L}{2}\cos\alpha = N\,L\sin\gamma.$$



Кривошип: сила тяжести в середине и сила $\vec{N}$ со стороны шатуна под углом γ к кривошипу (сила шарнира O не показана: её момент относительно O равен нулю).

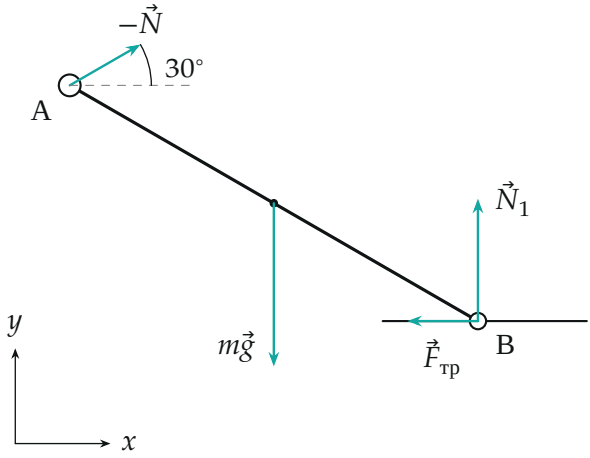
3. Моменты для шатуна относительно B. Зачем точка B: через неё проходят неизвестные $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила тяжести шатуна в середине, её плечо $\frac{AB}{2}\cos 30^\circ = \frac{AB}{2}\sin\alpha$. Сила $-\vec{N}$ в точке A составляет с кривошипом угол γ, а с шатуном (он перпендикулярен кривошипу) — угол $90^\circ-\gamma$; её плечо $AB\sin(90^\circ-\gamma) = AB\cos\gamma$:

$$mg\,\frac{AB}{2}\sin\alpha = N\,AB\cos\gamma.$$

4. Сила в шарнире A. Делим уравнение шага 2 на уравнение шага 3:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha \quad\Rightarrow\quad \gamma = 90^\circ - \alpha = 30^\circ.$$

Тогда из шага 2: $N = \dfrac{mg\cos\alpha}{2\sin\gamma} = \dfrac{mg}{2}$. Направление: кривошип наклонён под $\alpha = 60°$, сила $-\vec{N}$ на шатун отклонена от него на γ вниз, то есть идёт вверх-вправо под углом $\alpha - \gamma = 2\alpha - 90° = 30°$ к горизонтали.



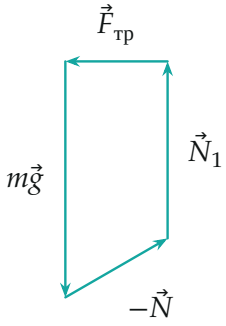
Шатун: сила тяжести, сила $-\vec{N}$ со стороны кривошипа ($mg/2$ под 30° к горизонтали), реакция $\vec{N}_1$ и трение $\vec{F}_{тр}$ на ползун. Длины стрелок пропорциональны модулям.

5. Равновесие сил шатуна. Второй закон Ньютона для шатуна (с невесомым ползуном) без ускорения: $-\vec{N} + m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}} = 0$. Проекции:

$$x:\ N\cos(\alpha-\gamma) - F_{\text{тр}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = N\cos(\alpha-\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{4}mg,$$

$$y:\ N\sin(\alpha-\gamma) + N_1 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = mg - N\sin(\alpha-\gamma) = \frac{3}{4}mg.$$

Сила трения направлена влево: шатун «распирает» ползун вправо, трение его удерживает.

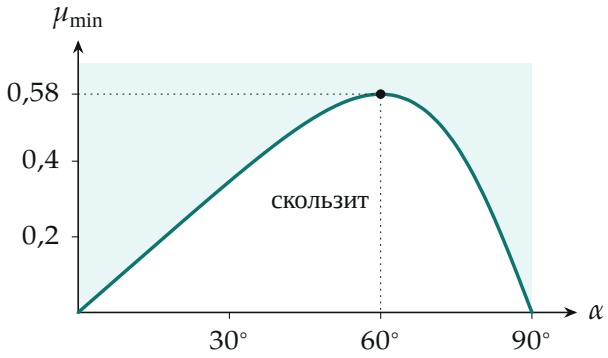


Многоугольник сил шатуна замкнут: $m\vec{g} + (-\vec{N}) + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр} = 0$.

6. Условие отсутствия скольжения. Сила трения покоя не больше максимальной: $F_{тр} \le \mu N_1$, поэтому

$$\mu \ge \frac{F_{тр}}{N_1} = \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{2 - \sin(\alpha - \gamma)} = \frac{\sin 2\alpha}{2 + \cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{3}/4}{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

(Здесь $\alpha - \gamma = 2\alpha - 90°$, поэтому $\cos(\alpha - \gamma) = \sin 2\alpha$, $\sin(\alpha - \gamma) = -\cos 2\alpha$.) Точное значение μ из равновесия не найти: при любом $\mu \ge \sqrt{3}/3$ механизм стоит, при меньшем — ползун уедет.



Наименьший коэффициент трения $\mu_{min} = \dfrac{\sin 2\alpha}{2 + \cos 2\alpha}$ *при* $\beta = 90°$ *в зависимости от* α *(python, шаг* $3°$*); выше кривой механизм стоит. Угол* $\alpha = 60°$ *из условия — самый «трудный»: здесь* μ_{min} *наибольший,* $\sqrt{3}/3$.

Обратите внимание. Сила в шарнире A не направлена вдоль шатуна: шатун весомый, и он не «стержень на двух шарнирах без нагрузки». Если считать её направленной вдоль AB, ответ получится неверным. И ответ — неравенство: равновесие задаёт лишь нижнюю границу μ.

Ответ. $\mu \geq \dfrac{\sin 2\alpha}{2+\cos 2\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$.

Проверка. Размерность: μ безразмерен, отношение сил. Второй способ — python: шесть уравнений равновесия двух звеньев в координатах ($L = 1$, $m = g = 1$) дают силу на шатун $(0{,}433;\ 0{,}25)$, то есть $mg/2$ под $30°$, $N_1 = 0{,}75$, $F_{\text{тр}} = 0{,}433$, отношение $0{,}5774 = \sqrt{3}/3$. Пределы: при $\alpha \to 90°$ кривошип вертикален, шатун лежит на поверхности, распора нет — $\mu_{\min} \to 0$; при $\alpha \to 0$ шатун вертикален и давит прямо вниз — тоже $\mu_{\min} \to 0$.

Физический смысл. Тяжёлые звенья, опираясь друг на друга, «складываются» и распирают ползун вбок; трение должно удержать этот распор, а он относительно прижима наибольший как раз при $\alpha = 60°$.

Ответ. $\mu \geq \dfrac{\sin 2\alpha}{2+\cos 2\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$.