Планетарная передача

Задача 2. [ИОШ 2021/22, 11 класс, задача 2] В дифференциалах автомобилей и автоматических коробках передач используются системы шестерней, в которых отсутствуют жесткие кинематические связи — планетарные передачи. Рассмотрите модель планетарной передачи, в которой кривошип AB (рычаг, вращающийся вокруг одного из своих концов) вращается вокруг оси A неподвижного зубчатого колеса 1. Колесо 2 имеет N зубьев, колесо 1 — $3N$ зубьев. Сколько оборотов вокруг своей оси совершит колесо 2, когда кривошип AB совершит n оборотов вокруг оси A?

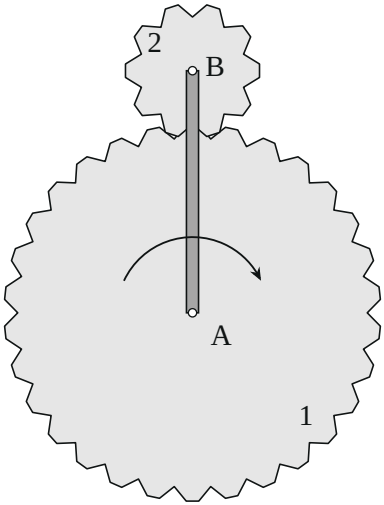


Рисунок условия: неподвижное колесо 1, колесо 2 на конце кривошипа AB (на рисунке показано по 30 и 10 зубьев; в задаче $3N$ и N).

▲ **Решение. Что происходит.** Колесо 2 катится по неподвижному колесу 1 снаружи, без проскальзывания, и в то же время его ось B обходит точку A вместе с кривошипом. Поэтому поворот колеса 2 складывается из двух частей: оно обкатывается по колесу 1 (поворот относительно кривошипа, его даёт равенство пройденных дуг) и вместе с кривошипом поворачивается ещё на тот же угол, что и кривошип. Главная идея: приравнять длины дуг, пройденных по обоим колёсам, а потом сложить

повороты. Это задача на качение без проскальзывания и сложение вращений.

Обозначения. r и R — радиусы колёс 2 и 1 (по окружностям, по которым они касаются), $\Delta\varphi$ — угол поворота кривошипа (по часовой стрелке, как на рисунке). «Оборот вокруг своей оси» считаем относительно неподвижной системы отсчёта (стойки, на которой закреплены ось A и колесо 1): так, как его увидел бы наблюдатель, неподвижный относительно колеса 1.

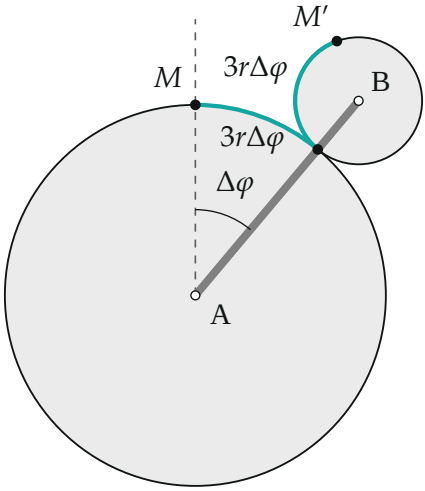
Качественная картина. Посчитаем по зубьям. Колесо 2 прокатывается без проскальзывания, поэтому на каждый зуб пути по колесу 1 приходится один зуб колеса 2. Колесо 1 — $3N$ зубьев, колесо 2 — N: обойдя колесо 1 один раз, колесо 2 пройдёт по $3N$ зубьям, то есть сделает $3N/N = 3$ оборота относительно кривошипа. К этому добавляется оборот вместе с кривошипом: $3 + 1 = 4$. Ниже то же самое выводится через углы.

1. Радиусы колёс. Зубья у колёс одинаковые, поэтому число зубьев пропорционально длине окружности, а значит, и радиусу:

$$\frac{R}{r} = \frac{3N}{N} = 3, \qquad R = 3r.$$

Ось B находится на расстоянии $R + r = 4r$ от A — колёса касаются снаружи.

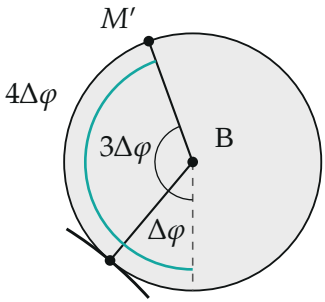
2. Дуги равны. Пусть кривошип повернулся на $\Delta\varphi$. Точка касания Q ушла от первоначальной точки M по неподвижному колесу на дугу длиной $R\,\Delta\varphi = 3r\Delta\varphi$. Колесо 2 не проскальзывает, поэтому по его окружности прошла дуга такой же длины. Дуга радиуса r длиной $3r\Delta\varphi$ стягивает угол $3\Delta\varphi$: именно на этот угол радиус BM' (до точки M' колеса 2, которая раньше касалась точки M) повернулся относительно нового радиуса BQ.



После поворота кривошипа на $\Delta\varphi = 40°$: выделенные дуги колёс равны, $R\Delta\varphi = 3r \cdot \Delta\varphi$. Точка M' колеса 2 раньше касалась точки M колеса 1.

3. Поворот колеса 2 относительно неподвижной системы. Радиус BQ сам повернулся вместе с кривошипом: он всё время направлен на точку A, а прямая AB повернулась на $\Delta\varphi$. Вначале радиус колеса 2 к точке касания смотрел вниз; теперь радиус BQ повёрнут от вертикали на $\Delta\varphi$, а метка BM' — ещё на $3\Delta\varphi$ дальше в ту же сторону. Значит, в неподвижной системе колесо 2 повернулось на

$$\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi + 3\Delta\varphi = 4\Delta\varphi.$$

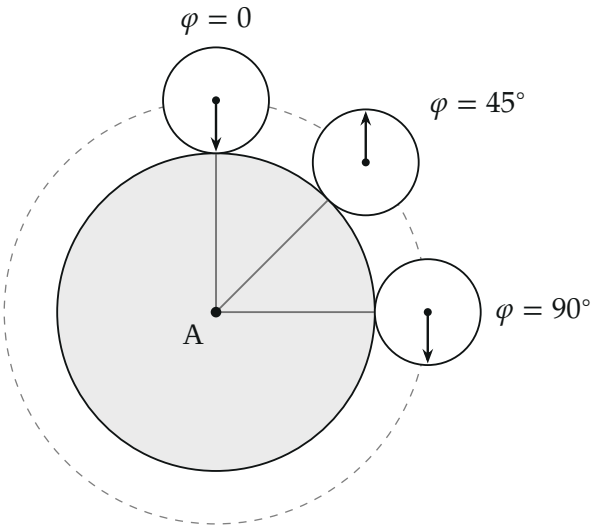


Пунктир — направление на точку касания в начале (вниз), BQ — сейчас, BM' — на метку: колесо повернулось на $4\Delta\varphi$ в сторону вращения кривошипа.

4. Полный оборот кривошипа. Равенство $\Delta\varphi_2 = 4\Delta\varphi$ верно при любом $\Delta\varphi$, поэтому при $\Delta\varphi = 2\pi n$ колесо 2 повернётся на $8\pi n$, то есть сделает

$$\frac{8\pi n}{2\pi} = 4n$$

оборотов.



Метка на колесе 2 (стрелка из оси на обод): за четверть оборота кривошипа колесо делает целый оборот и метка возвращается в исходное положение. Кривошип вращается по часовой стрелке.

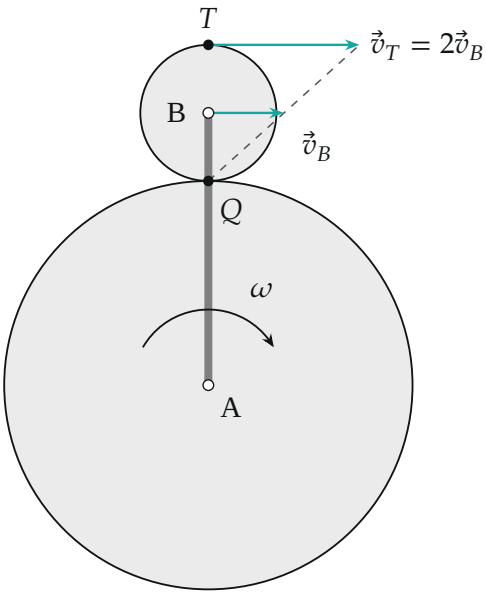
Обратите внимание: ответ $4n$ — это обороты в неподвижной системе. Относительно кривошипа (наблюдателя, который едет вместе с осью B) колесо 2 делает на один оборот меньше, $3n$: именно столько раз оно «обкатывает» окружность большого колеса, отложив $3r\Delta\varphi$ вдоль своей окружности. Если бы колесо 2 катилось внутри большого колеса, угол был бы $(R - r)/r \cdot \Delta\varphi = 2\Delta\varphi$.

Второй способ: мгновенный центр скоростей. Колесо 1 неподвижно, а колесо 2 не проскальзывает, поэтому скорость точки касания Q колеса 2 равна нулю: в этот момент колесо 2 поворачивается вокруг Q. Ось B движется вместе с кривошипом по окружности радиуса $4r$ со скоростью $v_B = \omega \cdot 4r$, где ω — угловая скорость кривошипа. Так как точка

B отстоит от центра вращения Q на r, угловая скорость колеса

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r} = 4\omega,$$

то есть колесо 2 вращается в 4 раза быстрее кривошипа и в ту же сторону. Скорость верхней точки T вдвое больше скорости оси: она в $2r$ от Q.



Скорости точек колеса 2 пропорциональны расстоянию до Q: $v_Q = 0$, v_B, $v_T = 2v_B$. Здесь показан момент, когда кривошип вертикален.

Угловые скорости связаны так же, как и углы: $\omega_2/\omega = 4$, поэтому и повороты $\Delta\varphi_2 = 4\Delta\varphi$.

Проверка. Число оборотов безразмерно. Колёса одинаковые ($R = r$): формула $(R + r)/r = 2$ даёт два оборота колеса за один обход вокруг такого же колеса — известный результат для монеты, катящейся вокруг монеты. Если $R \to \infty$, колесо катится по прямой, и число оборотов равно пройденному пути, делённому на $2\pi r$, — в формуле $(R+r)/r$ главное слагаемое R/r. Физический смысл: из четырёх оборотов три даёт сама обкатка, а четвёртый — вращение с кривошипом вокруг оси A.



Повороты колеса 2 в зависимости от числа оборотов кривошипа n: прямая $4n$ — в неподвижной системе, пунктир $3n$ — относительно кривошипа.

Ответ. Колесо 2 сделает $4n$ оборотов вокруг своей оси (в неподвижной системе отсчёта; относительно кривошипа — $3n$).