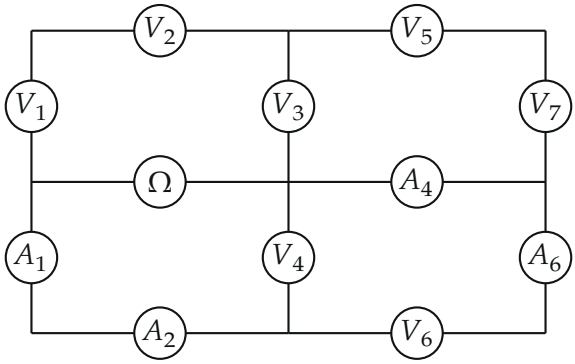
Амперметры и вольтметры в цепи с омметром

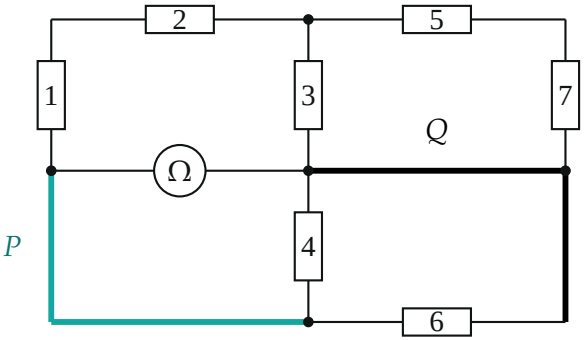
Задача 4. [ИОШ 2021/22, 11 класс, задача 4] Собрана электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке. Цепь состоит из четырех амперметров, семи вольтметров и одного омметра (прибора для измерения сопротивлений). Известны показания вольтметра V_3: $U = 1$ В и амперметра A_4: $I = 1$ мкА. Найти сопротивление вольтметра и показания омметра Ω. Все вольтметры одинаковы, сопротивления амперметров очень малы по сравнению с сопротивлениями вольтметров.



▲ **Решение.** **Что происходит.** В цепи нет батареи, но омметр — источник: чтобы измерить сопротивление, он сам подаёт напряжение на исследуемую цепь и измеряет ток. Амперметры имеют пренебрежимо малое сопротивление, поэтому для расчёта они — обычные провода, а вольтметры — одинаковые резисторы R_V. Остаётся цепь из семи резисторов и источника. Главная идея: показания U и I связывают токи на разных участках; из условий «напряжения на параллельных участках равны» и «сумма токов в узле равна нулю» найти ток через V_3, а по нему — R_V и показание омметра. Это задача на цепь постоянного тока: замена приборов, свёртка параллельных и последовательных участков, баланс токов в узлах.

Обозначения. I_k — ток через вольтметр V_k, R_V — сопротивление одного вольтметра, I_Ω и U_Ω — ток через омметр (как через источник) и напряжение на нём.

1. Эквивалентная схема. Амперметры A_1 и A_2 — провода: левый, нижний левый и нижний средний узлы цепи соединены накоротко и образуют один узел P. Амперметры A_4 и A_6 — тоже провода: средний (центральный), правый средний и правый нижний узлы образуют узел Q.



Эквивалентная схема (цифры — номера вольтметров, сопротивление каждого R_V): амперметры стали проводами, узлы P (бирюзовые провода) и Q (чёрные) — по три узла, слитые в один.

Омметр оказался включён между узлами P и Q, и с точки зрения источника сеть вольтметров — параллельное соединение двух ветвей.

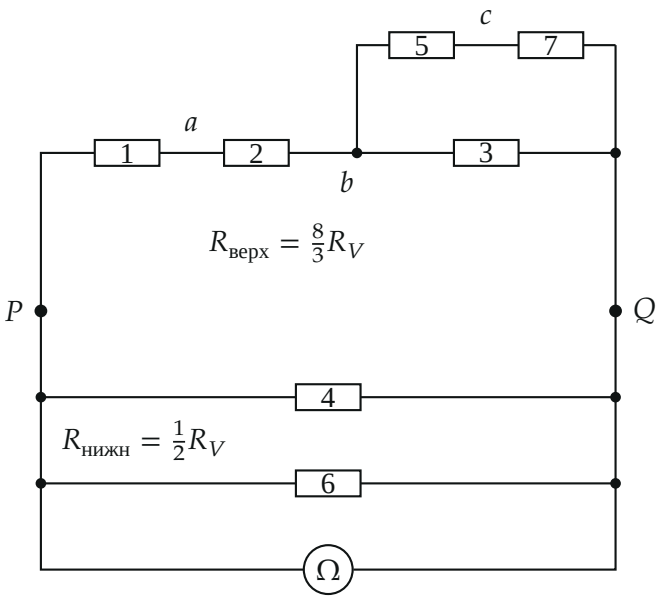


Схема после слияния узлов: источник Ω нагружен двумя ветвями между P и Q.

2. Две ветви. Нижняя ветвь — V_4 и V_6 параллельно: $R_{\text{нижн}} = \dfrac{R_V}{2}$. Верхняя ветвь: V_1 и V_2 последовательно, затем узел b и дальше участок из V_3, параллельного цепочке $V_5 + V_7$ (сопротивление цепочки $2R_V$):

$$R_{\text{верх}} = R_V + R_V + \frac{R_V \cdot 2R_V}{R_V + 2R_V} = \frac{8}{3}R_V.$$

Обе ветви присоединены к одним и тем же узлам P и Q, значит, напряжение на них одинаково, и токи обратно пропорциональны сопротивлениям:

$$I_{\text{нижн}} = \frac{R_{\text{верх}}}{R_{\text{нижн}}} I_{\text{верх}} = \frac{16}{3} I_{\text{верх}}. \qquad (*)$$

3. Токи через вольтметры. Через V_3 течёт $I_3 = U/R_V$. Цепочка $V_5 + V_7$ включена параллельно V_3 — на ней то же напряжение U, а сопротивление $2R_V$, поэтому через каждый из них идёт ток $\dfrac{U}{2R_V} = \dfrac{I_3}{2}$. Весь ток верхней ветви проходит через V_1 (и V_2) и затем делится в узле

b:

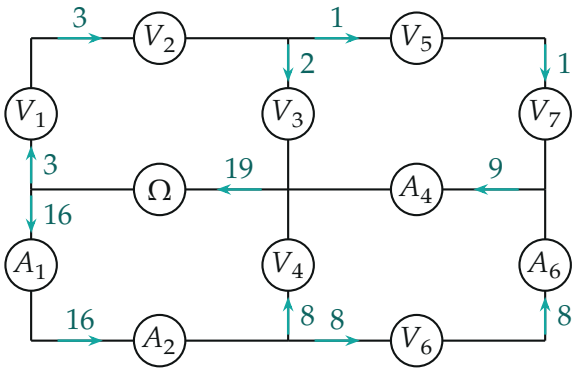
$$I_{\text{верх}} = I_3 + \frac{I_3}{2} = \frac{3}{2} I_3.$$

Теперь используем показание амперметра A_4. Узлы «правый средний» и «правый нижний» соединены проводом (A_6) и образуют один узел, куда ток приходит из V_7 (ток $I_3/2$) и из V_6 и уходит единственным путём — через A_4:

$$I = \frac{I_3}{2} + I_6, \qquad I_6 = I - \frac{I_3}{2}.$$

Вольтметры V_4 и V_6 включены параллельно, поэтому токи через них равны, $I_4 = I_6$, и

$$I_{\text{нижн}} = 2I_6 = 2I - I_3.$$



Токи в ветвях в единицах $I/9$ (направления — для источника Ω с плюсом слева): сумма токов в каждом узле равна нулю; через A_4 течёт 9 единиц, то есть I.

4. Сопротивление вольтметра. Подставим в $(*)$:

$$2I - I_3 = \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2} I_3 = 8I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{2}{9} I,$$

$$R_V = \frac{U}{I_3} = \frac{9U}{2I} = 4{,}5 \cdot 10^6 \text{ Ом}.$$

Остальные токи (в единицах $I/9$): $I_5 = I_7 = 1$, $I_{\text{верх}} = 3$, $I_4 = I_6 = 8$, $I_{\text{нижн}} = 16$, $I_\Omega = 3 + 16 = 19$.

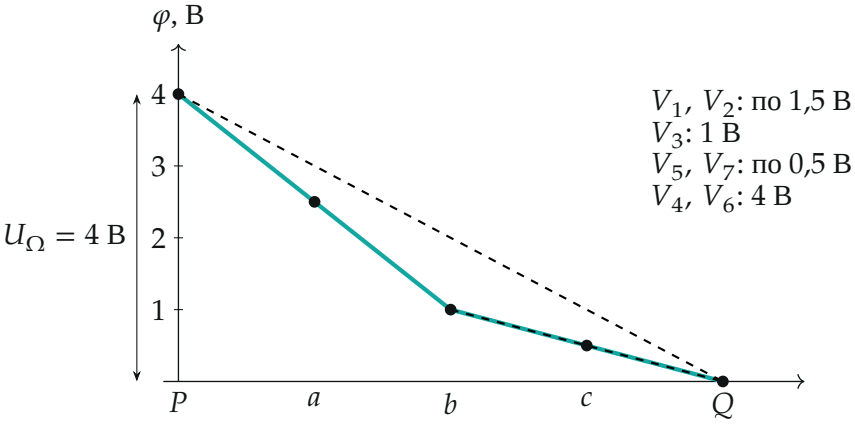
5. Показание омметра. Омметр измеряет сопротивление цепи между P и Q: $R_\Omega = U_\Omega / I_\Omega$. Ток через него (ток источника) равен сумме токов двух ветвей $I_\Omega = I_{\text{верх}} + I_{\text{нижн}} = \dfrac{19}{9} I$, а напряжение — падению на нижней ветви:

$$U_\Omega = I_{\text{нижн}} \frac{R_V}{2} = \frac{16}{9} I \cdot \frac{R_V}{2} = \frac{8}{9} I R_V = 4 \text{ В}.$$

Тогда

$$R_\Omega = \frac{U_\Omega}{I_\Omega} = \frac{\frac{8}{9} I R_V}{\frac{19}{9} I} = \frac{8}{19} R_V = \frac{36}{19} \frac{U}{I} \approx 1{,}89 \cdot 10^6 \text{ Ом}.$$

Обратите внимание: ток через омметр не равен току A_4: через A_4 идёт лишь часть тока (его вторая часть, V_3, приходит в центральный узел отдельно).



Потенциалы узлов относительно Q: напряжение на омметре 4 В складывается по верхней ветви из падений на V_1 (1,5 В), V_2 (1,5 В) и V_3 (1 В), по нижней — из падения 4 В на V_4 и V_6.

Проверка. Размерность: U/I — ом. Верхняя ветвь по падениям напряжения: $1{,}5 + 1{,}5 + 1 = 4$ В — то же, что на нижней ветви ($8\,\text{мкА}/9 \cdot 4{,}5 \cdot 10^6$ Ом $= 4$ В). Второй способ — баланс мощности: омметр отдаёт $U_\Omega I_\Omega = 4 \cdot \frac{19}{9} \approx 8{,}44$ мкВт, а вольтметры выделяют $R_V \sum I_k^2 =$

$4{,}5 \cdot 10^6 \cdot \frac{152}{81} \cdot 10^{-12} \approx 8{,}44$ мкВт — совпадает. Физический смысл: сопротивление, измеряемое омметром, меньше сопротивления любой из двух ветвей: $R_\Omega = \frac{8}{19} R_V < \frac{1}{2} R_V$, как и должно быть при параллельном соединении.

Ответ. $R_V = \dfrac{9U}{2I} = 4{,}5 \cdot 10^6$ Ом; показание омметра $R_\Omega = \dfrac{36\,U}{19\,I} \approx 1{,}89 \cdot 10^6$ Ом.