Бильярдные шары у центральных луз

Задача 5. [ИОШ 2021/22, 11 класс, задача 5] Если два бильярдных шара встают напротив центральных луз бильярдного стола (рисунок), опытный игрок может ударить по одному из шаров так, что (1) оба шара попадут в лузу, расположенную в направлении удара; (2) один попадет в лузу, расположенную в направлении удара, а второй — в противоположную. Как это делается? Опишите, как нужно наносить удар, как сталкиваются в этом случае шары, и почему в одном случае оба шара движутся после удара вперед, а в другом — один вперед, один назад. Ответ обосновать.

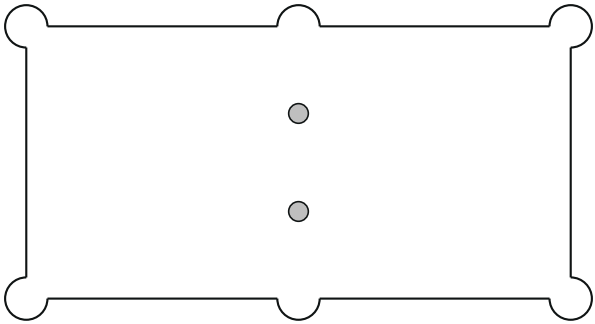


Рисунок условия: стол с шестью лузами, два шара на линии между средними лузами.

▲ **Решение. Что происходит.** Шары на линии удара сталкиваются «лоб в лоб». У шаров одинаковой массы при упругом лобовом ударе поступательные скорости меняются местами: биток (шар, по которому бьют кием) останавливается, а мишень уходит с его скоростью. Но биток может вращаться, а шары между собой гладкие: мишень вращения битка «не чувствует», и биток после удара остаётся на месте, продолжая вращаться. Дальше его раскручивает стол: трение о сукно превращает вращение в движение — вперёд, если шар вращается вперёд, и назад, если вращается назад. Главная идея: вращение битка задают точкой удара кием (выше или ниже центра), а его знак в момент столкновения решает, куда поедет биток. Это задача на упругий удар с вращением и на трение качения–скольжения.

Обозначения. m, R — масса и радиус шара, $I = \frac{2}{5}mR^2$ — момент инерции шара. Ось направим вдоль линии удара вперёд (к дальней лузе); $\omega > 0$ — вращение «вперёд» (верх шара движется вперёд, как у шара, катящегося вперёд), $\omega < 0$ — назад. Между шарами трения нет, коэффициент трения шара о стол μ.

1. Лобовой упругий удар шаров без вращения. Система двух шаров за время удара замкнута по горизонтали: сила тяжести и реакция стола компенсируются. Пусть налетающий шар имеет скорость v_1 (проекция на ось), мишень покоится; после удара u_1 и u_2. Закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии (шары упругие):

$$mv_1 = mu_1 + mu_2, \qquad \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}.$$

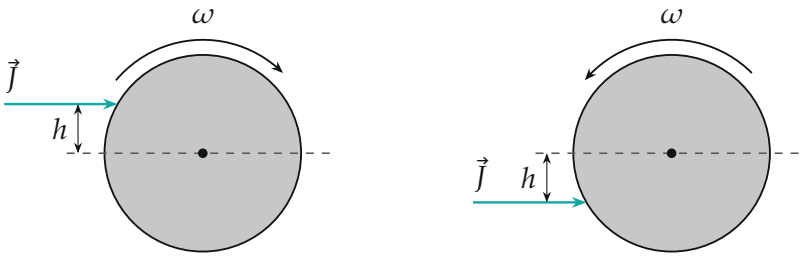
Из первого $u_2 = v_1 - u_1$; подставим во второе: $v_1^2 = u_1^2 + (v_1 - u_1)^2$, откуда $u_1(u_1 - v_1) = 0$. Корень $u_1 = v_1$ — шары не столкнулись; значит, $u_1 = 0$, $u_2 = v_1$: шары обменялись скоростями.

2. Что делает вращение при ударе. Сила взаимодействия шаров направлена по линии центров, трения между ними нет, поэтому её момент относительно центра шара равен нулю, и угловая скорость каждого шара за время удара не меняется. Поступательные скорости — как в пункте 1. Итог: сразу после столкновения мишень движется вперёд со скоростью v_1 (она не вращается), биток стоит ($v = 0$) и вращается с прежней ω_1.

3. Как раскрутить биток. Кий бьёт горизонтально; импульс удара J приложен на высоте h над центром шара ($h < 0$ — ниже). Закон сохранения импульса для шара $mv_0 = J$, момент импульса относительно центра $Jh = I\omega_0$. Отсюда

$$v_0 = \frac{J}{m}, \qquad \omega_0 = \frac{5\,v_0\,h}{2R^2}.$$

Удар выше центра ($h > 0$) раскручивает шар вперёд, ниже ($h < 0$) — назад. Бить можно лишь не слишком далеко от центра ($|h| < R/2$): иначе кий соскользнёт с шара.

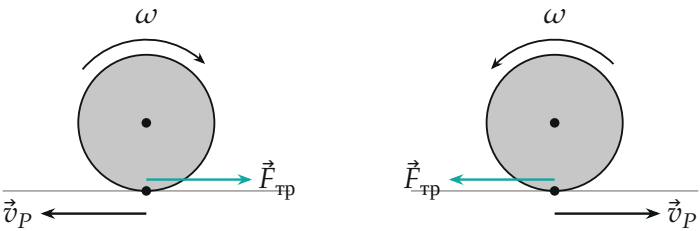


(а) удар выше центра (б) удар ниже центра

Удар кием: импульс $\vec{J}$ на высоте h над центром (а) или под центром (б); раскрутка вперёд (а) и назад (б).

4. Путь до мишени. Пока шар проскальзывает по сукну, трение скольжения μmg направлено против скорости точки касания $v - \omega R$. Оно уменьшает проскальзывание: если $v > \omega R$, трение замедляет шар и подкручивает его вперёд, если $v < \omega R$ — разгоняет и закручивает назад. Вращение после удара кием сохраняет знак, пока расстояние до мишени невелико (пример с числами — в п. 7).

5. После столкновения: куда поедет биток. Биток стоит и вращается с ω_1. Скорость его нижней точки относительно стола $v - \omega_1 R = -\omega_1 R$: при $\omega_1 > 0$ точка касания скользит назад, при $\omega_1 < 0$ — вперёд. Трение стола направлено против этого скольжения и разгоняет биток в сторону вращения.



вращается вперёд вращается назад

Биток сразу после удара: скорость нижней точки $\vec{v}_P$ и сила трения со стороны стола $\vec{F}_{тр}$.

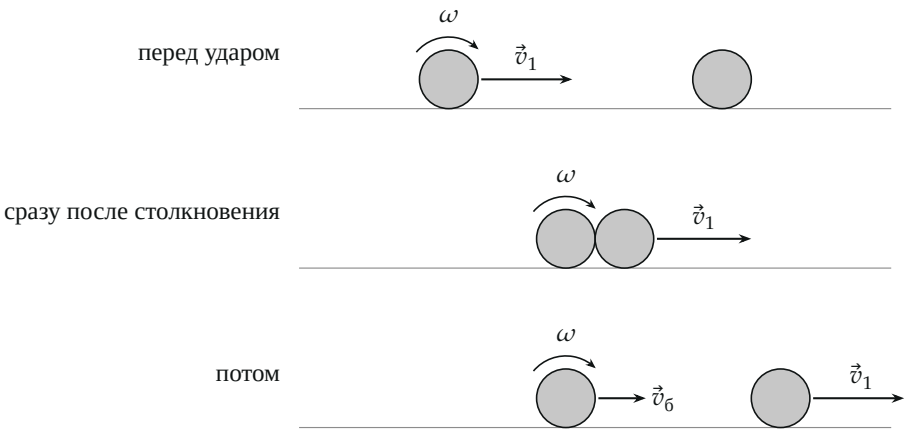
Найдём конечную скорость. Силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ приложены на одной вертикали и вместе с трением не создают момента относительно оси, про-

ходящей через точку касания (трение приложено в ней, N и mg компенсируются), поэтому сохраняется момент импульса относительно линии касания $L = I\omega + mvR$. Вначале $L = I\omega_1$ ($v = 0$), в конце шар катится без проскальзывания, $\omega = v_б/R$:

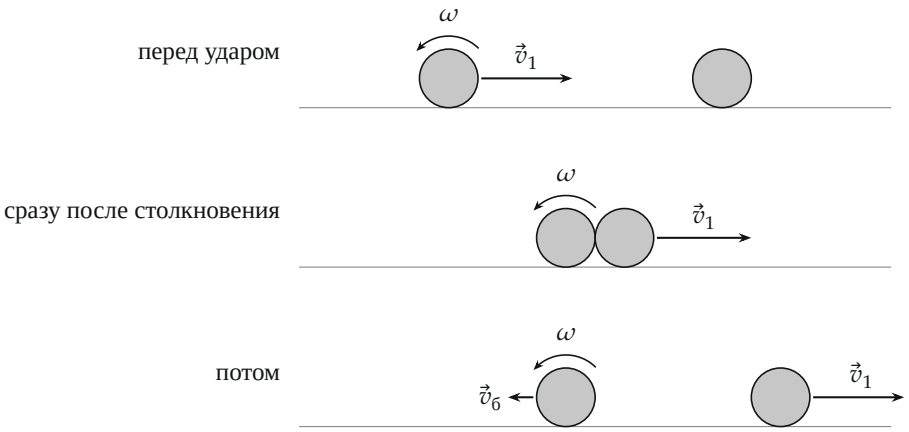
$$I\omega_1 = \frac{2}{5}mR^2\,\omega_1 = \left(\frac{2}{5}+1\right)mR\,v_б \quad \Rightarrow \quad v_б = \frac{2}{7}\,\omega_1 R.$$

Знак $v_б$ совпадает со знаком ω_1: биток поедет вперёд, если вращается вперёд, и назад, если вращается назад.

6. Ответ. (1) Бить выше центра битка: $h > 0$, биток вращается вперёд, $\omega_1 > 0$; после столкновения мишень уходит вперёд со скоростью v_1, а биток — вперёд со скоростью $\frac{2}{7}\omega_1 R$. Мишень идёт быстрее, и оба шара попадают в дальнюю лузу, лежащую в направлении удара. (2) Бить ниже центра: $h < 0$, $\omega_1 < 0$; мишень уходит вперёд в дальнюю лузу, а биток сначала стоит, затем откатывается назад со скоростью $\frac{2}{7}|\omega_1|R$ и попадает в ближнюю, противоположную лузу.



Случай (1): удар выше центра. Сверху вниз: перед столкновением; сразу после него (биток стоит и вращается, мишень идёт с v_1); потом биток разгоняется вперёд до $v_б = \frac{2}{7}\omega_1 R < v_1$.



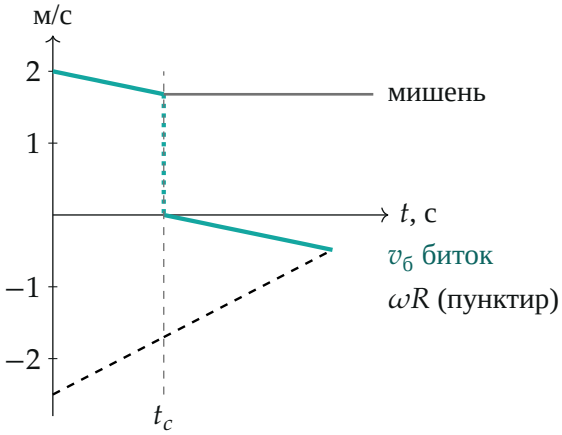
Случай (2): удар ниже центра. Вращение битка направлено назад, и после столкновения он откатывается назад.

7. Числа для примера (стол $\mu = 0{,}2$, расстояние между шарами $L = 0{,}3$ м, скорость битка после удара кием $v_0 = 2$ м/с, точка удара $h = \pm R/2$, то есть $\omega_0 R = \frac{5v_0 h}{2R} = \pm 1{,}25\, v_0 = \pm 2{,}5$ м/с).

Случай (2): $v_0 > \omega_0 R$, нижняя точка скользит вперёд, трение тормозит шар и уменьшает обратное вращение: $v = v_0 - \mu g t$, $\omega R = \omega_0 R + \frac{5}{2}\mu g\, t$. Скорости сравнялись бы через $t = \frac{2(v_0 - \omega_0 R)}{7\mu g} \approx 0{,}66$ с, а до мишени шар доходит раньше — из $L = v_0 t - \mu g t^2/2$, $t_c \approx 0{,}16$ с.

Случай (1): $\omega_0 R = 2{,}5$ м/с $> v_0$, нижняя точка скользит назад, трение разгоняет шар и уменьшает вращение: $v = v_0 + \mu g t$, $\omega R = \omega_0 R - \frac{5}{2}\mu g\, t$. Уже через $t = \frac{2(\omega_0 R - v_0)}{7\mu g} \approx 0{,}07$ с (путь около 0,15 м $< L$) скольжение кончается, и дальше шар катится: по сохранению момента импульса относительно линии касания $v = \omega R = \frac{5v_0 + 2\omega_0 R}{7} = \frac{15}{7} \approx 2{,}14$ м/с. Получаем:

	v_1, м/с	$\omega_1 R$, м/с	$v_б$, м/с	мишень, м/с
(1) $h = +R/2$	2,14	+2,14	+0,61	+2,14
(2) $h = -R/2$	1,68	−1,70	−0,49	+1,68



Случай (2) с числами: скорость битка $v_б$ (бирюзовая), величина ωR (пунктир) и скорость мишени. В момент t_c скорость битка передаётся мишени; затем трение доводит $v_б$ до $\frac{2}{7}\omega_1 R = -0{,}49$ м/с, и дальше $v = \omega R$.

Обратите внимание: исход определяет знак вращения битка *в момент столкновения*, а не только точка удара. При ударе ниже центра трение о сукно по дороге уменьшает обратное вращение, и на большом расстоянии оно сменит знак (как $\omega R = \omega_0 R + \frac{5}{2}\mu g t$ при $\omega_0 < 0$) — обратный ход не получится. Поэтому «оттяжку» бьют, когда шары близко друг к другу, как в условии.

Проверка. Удар в центр ($h = 0$): $\omega_0 = 0$; на коротком расстоянии $\omega_1 \approx 0$ и $v_б \approx 0$ — биток «садится» на месте после столкновения (стоп-шар), что известно из бильярда. Удар на высоте $h = \frac{2}{5}R$ даёт $\omega_0 R = v_0$ — чистое качение сразу: $v_б = \frac{2}{7}v_0$ — известное значение для «наката». Размерность: $\frac{2}{7}\omega R$ — скорость, м/с. Энергия: сумма кинетических энергий после удара не превосходит начальной (трение стола только рассеивает).

Ответ. (1) Ударить выше центра битка: после столкновения шар-мишень идёт вперёд со скоростью битка, биток (вращающийся вперёд) — вперёд со скоростью $\frac{2}{7}\omega_1 R$, и оба шара уходят в лузу в направлении удара. (2) Ударить ниже центра: мишень идёт вперёд, биток (вращающийся назад) откатывается назад в противоположную лузу. Вперёд или назад — определяет знак вращения битка в момент столкновения.