«Ванька-встанька» из шаров

Задача 6. [ИОШ 2021/22, 11 класс, задача 6] Незнайка решил изготовить «инновационного ваньку-встаньку». Для этого он взял очень много шаров одинаковой плотности, радиусы которых отличаются вдвое. Незнайка скрепил шары так, что центры всех шаров лежат на одной прямой, а радиус каждого последующего меньше радиуса предыдущего в 2 раза. Незнайка решил, что из-за большой массы самого нижнего шара такая конструкция, поставленная на большой шар, будет устойчивой. Но «ванька-встанька» устойчивым не был. Объясните, почему. Знайка посоветовал Незнайке прикрепить к самой нижней точке большого шара точечное массивное тело. Какую оно должно иметь массу, чтобы «инновационный ванька-встанька» был устойчивым? Масса самого большого шара — m.

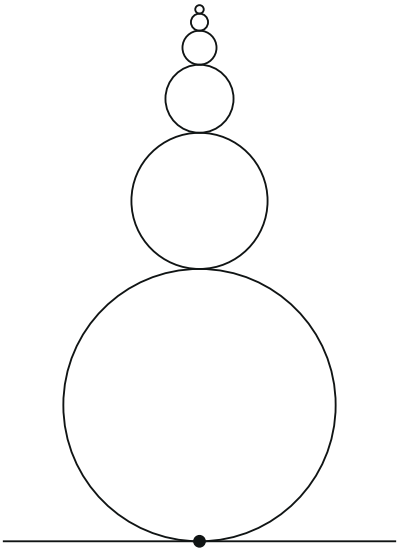


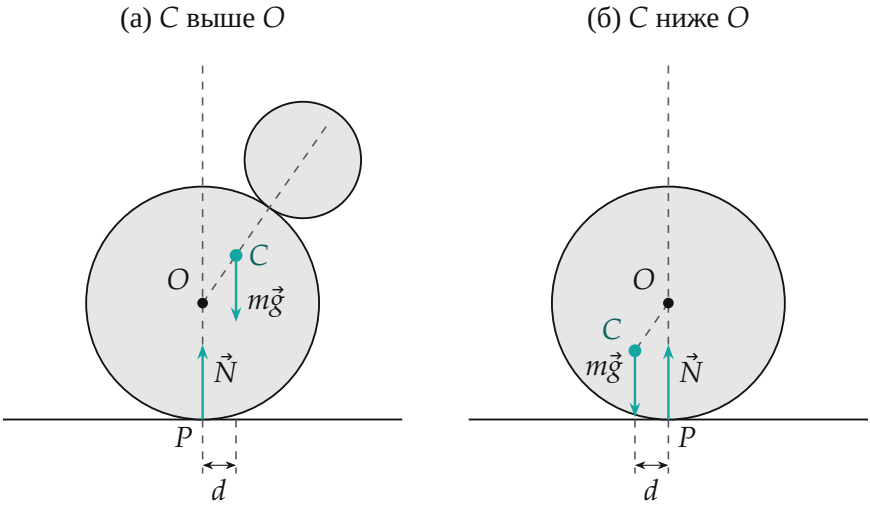
Рисунок условия: шары подряд, радиус каждого следующего вдвое меньше, центры на одной вертикали; чёрная точка — нижняя точка большого шара (сюда крепят груз).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тело с гладкой шарообразной нижней частью стоит на плоскости в одной точке. Если слегка наклонить его,

оно покатится, и всё решает, вернётся ли оно назад: это определяет, где лежит центр тяжести — ниже или выше центра нижнего шара (центра кривизны опорной поверхности). Центр нижнего шара ваньки-встаньки совпадает с его центром тяжести, а всё, что стоит сверху, поднимает центр тяжести всей конструкции выше этого центра, поэтому конструкция неустойчива. Главная идея: найти положение центра тяжести бесконечной цепочки шаров, а затем выбрать массу груза в нижней точке так, чтобы центр тяжести всей системы оказался ниже центра большого шара. Это задача на устойчивость равновесия и положение центра масс.

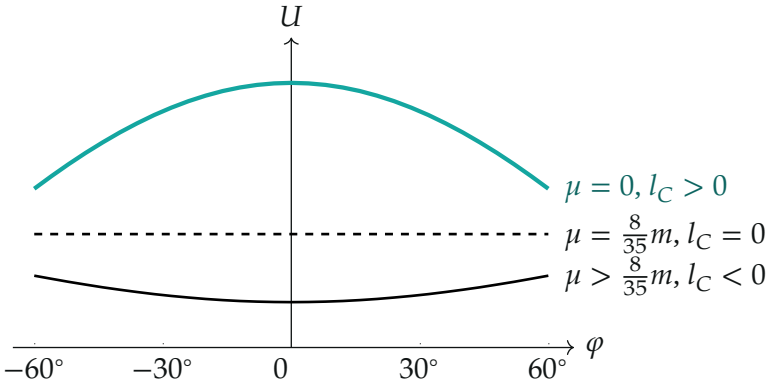
Обозначения. r — радиус большого шара, O — его центр, m — его масса; M — масса всей цепочки шаров без груза, C_0 — её центр тяжести, $l = OC_0$ — расстояние от O до C_0 (со знаком: вверх положительно), μ — масса груза в нижней точке, P — точка касания с горизонтальной плоскостью.

1. Условие устойчивости. Наклоним тело на малый угол φ; оно катится без проскальзывания по нижнему шару, точка касания P остаётся на плоскости, а центр O находится над P. Центр тяжести всего тела C лежит на оси тела на расстоянии l_C от O (положительно вверх), после наклона он смещается по горизонтали на $l_C \sin\varphi$ от вертикали, проходящей через O и P. Сила тяжести приложена в C, сила реакции — в P: момент относительно P создаёт только сила тяжести, её плечо $d = |l_C| \sin\varphi$. Если C выше O ($l_C > 0$), C смещается в сторону наклона, и момент силы тяжести ещё сильнее увеличивает наклон: равновесие неустойчиво. Если C ниже O ($l_C < 0$), C оказывается по другую сторону вертикали, и момент возвращает тело.



Тело наклонено на угол φ (катится по плоскости): в случае (а) момент силы тяжести относительно P опрокидывает тело, в случае (б) — возвращает. Положения C нарисованы для наглядности с увеличенным l_C.

Второй способ — энергия: высота центра тяжести над плоскостью $z = r + l_C \cos\varphi$. При $l_C > 0$ она уменьшается с ростом φ, потенциальная энергия имеет максимум в положении равновесия (неустойчиво); при $l_C < 0$ — минимум (устойчиво); при $l_C = 0$ энергия не меняется (безразличное равновесие).



Потенциальная энергия при наклоне (кривые смещены по вертикали).

2. Почему ванька-встанька неустойчив. У нижнего шара C совпадает с O, а добавочные шары расположены выше O, поэтому центр тяжести цепочки лежит выше O: $l > 0$ (ниже посчитаем, что $l = r/5$). По пункту 1 конструкция неустойчива.

3. Масса цепочки. Радиусы шаров образуют прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$, объёмы и (при одинаковой плотности) массы — со знаменателем $\frac{1}{8}$. Сумма бесконечной геометрической прогрессии:

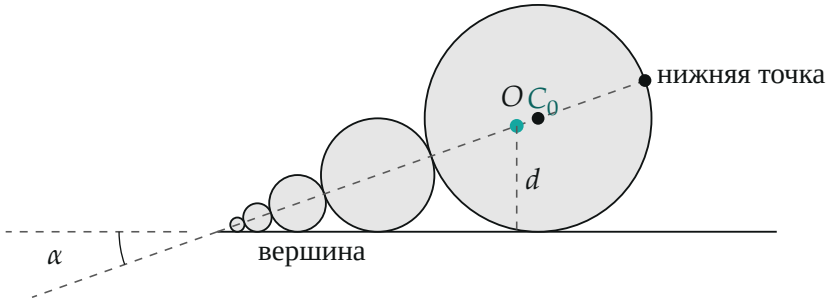
$$M = m + \frac{m}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 m + \dots = \frac{m}{1 - 1/8} = \frac{8m}{7}.$$

4. Центр тяжести цепочки. Формула для центра тяжести $x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$ приводит к сумме $\sum m_k x_k$, которая не является простой геометрической прогрессией, если x_k отсчитывать вдоль оси. Положим цепочку «на бок» на плоскость: так как каждый следующий шар вдвое меньше предыдущего, а центры лежат на одной прямой, все шары касаются плоскости (центры лежат на прямой, вершина конуса, огибающего шары, — на плоскости). Тогда высота центра каждого шара над плоскостью равна его радиусу, и высота центра тяжести над плоскостью

$$d = \frac{m\,r + \frac{m}{8} \cdot \frac{r}{2} + \frac{m}{64} \cdot \frac{r}{4} + \dots}{M}$$

$$d = \frac{mr\,(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \dots)}{8m/7} = \frac{16/15}{8/7}\,r = \frac{14}{15}\,r.$$

Здесь сумма в числителе — геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{16}$.



Цепочка, положенная на бок: все шары касаются плоскости, оси шаров — прямая, проходящая через вершину конуса под углом α к плоскости; C_0 — центр тяжести на высоте $d = \frac{14}{15}r$.

Угол α между осью и плоскостью найдём из большого шара: расстояние между центрами соседних шаров k и $k{+}1$ равно $r_k + \frac{r_k}{2} = \frac{3}{2}r_k$, а расстояние от O до вершины конуса — сумма

$$\frac{3}{2}r\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=3r.$$

Центр шара находится на высоте r над плоскостью, поэтому $\sin\alpha = \dfrac{r}{3r} = \dfrac{1}{3}$. Центр тяжести лежит на оси на высоте d, то есть на расстоянии $d/\sin\alpha = \frac{14}{5}r$ от вершины; от O до C_0 тогда

$$l = 3r - \frac{14}{5}r = \frac{r}{5},$$

и C_0 лежит выше O на $r/5$ — как и утверждали в начале.

Проверим другим способом, прямо вдоль оси. Расстояние от O до центра k-го шара $x_k = \frac{3}{2}r\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-2}}\right) = 3r\left(1-2^{1-k}\right)$ при $k \geq 1$ ($x_1 = 0$). Тогда

$$l = \frac{\sum m_k x_k}{M} = \frac{3rm\left(\frac{8}{7}-\frac{16}{15}\right)}{8m/7} = \frac{3r\cdot\frac{8}{105}}{8/7} = \frac{r}{5},$$

в точности то же значение.

5. Груз в нижней точке. Прикрепим к самой нижней точке большого

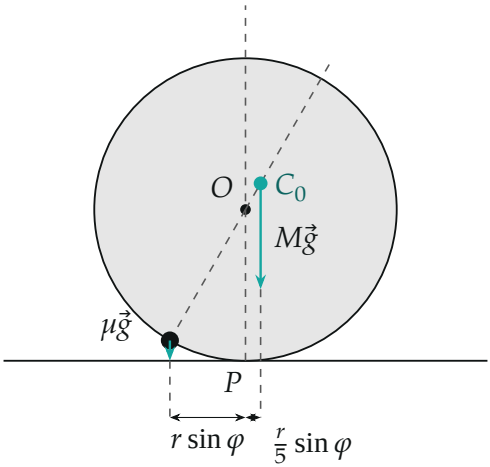
шара точечное тело массой μ; оно находится на расстоянии r ниже O. Центр тяжести системы относительно O (вверх положительно)

$$l_C = \frac{M \cdot \frac{r}{5} - \mu r}{M + \mu}.$$

Устойчивость требует $l_C < 0$:

$$M\frac{r}{5} < \mu r \quad \Rightarrow \quad \mu > \frac{M}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8m}{7} = \frac{8}{35}m.$$

При $\mu = \frac{8}{35}m$ центр тяжести совпадает с O, и равновесие безразличное: груз устойчивой конструкцию не делает.



Равновесие на грани: при $\mu = \frac{8}{35}m$ плечи $\frac{r}{5}\sin\varphi$ и $r\sin\varphi$ дают равные моменты $M \cdot \frac{r}{5}\sin\varphi = \mu r \sin\varphi$ (угол $\varphi = 30°$ для наглядности).

Обратите внимание: ответ — неравенство. Ровно $\frac{8}{35}m$ даёт безразличное равновесие (на таком грузе тело можно остановить в любом наклонённом положении, оно не возвращается), для устойчивости масса груза должна быть больше. Кроме того, «очень много шаров» — идеализация: бесконечные ряды суммируются, и реально оставшийся «хвост» из мельчайших шаров на ответ не влияет.

Проверка. Масса μ — в единицах m, размерность верна. Предел $\mu \to \infty$: центр тяжести уходит к нижней точке — устойчиво. При $\mu = 0$ получаем $l_C = r/5 > 0$ — неустойчиво, как в условии. Физический смысл: груз в нижней точке на плече r должен уравновесить момент «выноса» центра тяжести цепочки: $\mu r = M \cdot r/5$, то есть груз составляет пятую часть массы цепочки.

Ответ. Центр тяжести цепочки шаров лежит выше центра большого шара (на $r/5$), поэтому ванька-встанька неустойчив; груз в нижней точке делает конструкцию устойчивой при $\mu > \dfrac{8}{35}m$ (при $\mu = \dfrac{8}{35}m$ — безразличное равновесие).